Física Experimental Básica: Mecânica

Aula 2

Propagação de incertezas e Gráficos

Conteúdo da aula:

- Propagação de incertezas
- Gráficos
- Ajuste de curvas
- Linearização de gráficos
- Exercícios em sala

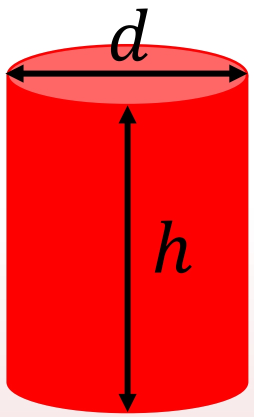
Propagação de incertezas

Propagação de incertezas

- Muitas vezes, teremos que determinar uma grandeza física de forma indireta. Isso será feito em duas etapas:

  1. Medimos uma ou mais grandezas relacionadas a ela.
  2. Calculamos a grandeza de interesse usando as medidas.

Exemplo: Para determinar o volume de um cilindro, medimos o seu diâmetro (*d*), sua altura (*h*) e, a seguir, calculamos $V = \pi(d/2)^2 h$.



- As incertezas das grandezas medidas produzirão uma incerteza no resultado da grandeza de interesse. Como a estimamos?

  1. Estimamos as incertezas das grandezas medidas.
  2. Determinamos como estas incertezas “se **propagam**”.

Propagação de incertezas

Regra geral para funções de uma variável

- Considere que uma grandeza Y é uma função f arbitrária de uma grandeza X:

$$Y = f(X).$$

- Suponha que a medição de X resulte em

$$x \pm \Delta x.$$

- Nesse caso, o valor y da grandeza Y será

$$y = f(x),$$

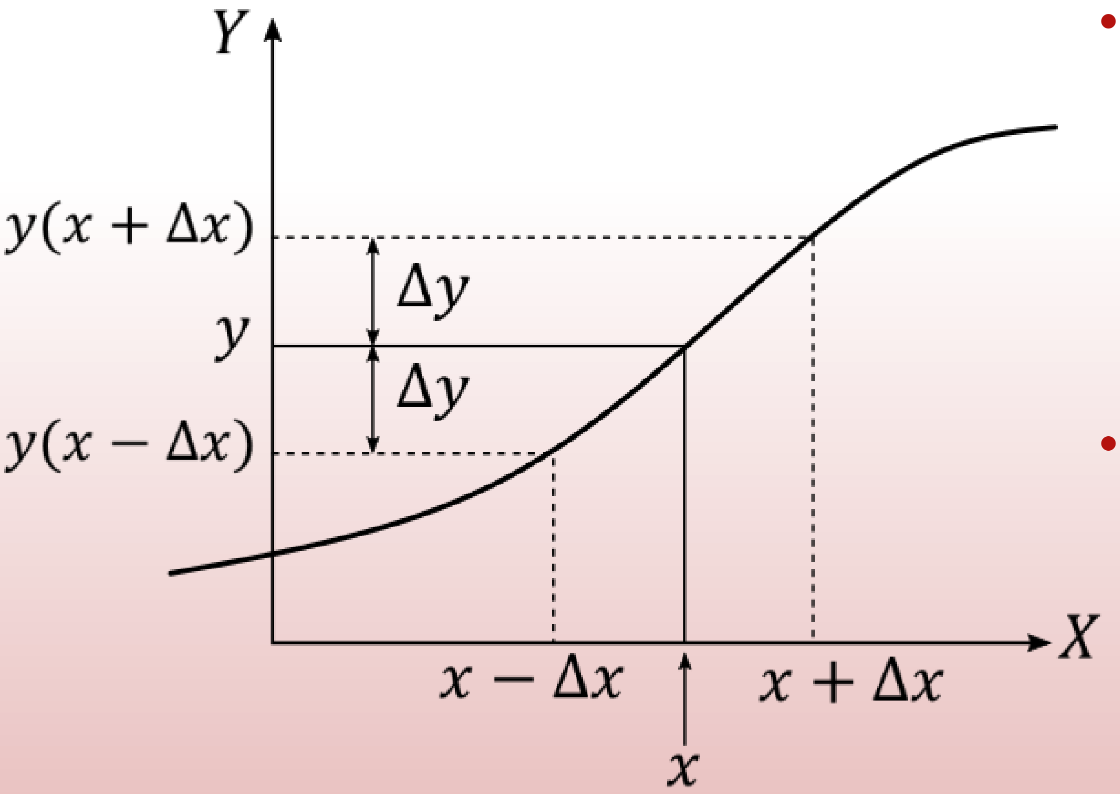
- A incerteza Δy é obtida pela seguinte regra:

$$\boxed{\Delta y = \left|\frac{dy}{dx}\right| \Delta x = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\Delta x\right)^2}.}$$

Propagação de incertezas

Regra geral para funções de uma variável

- Como podemos entender essa regra? (argumentos não rigorosos).
- Do gráfico abaixo vemos que $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$.



- Considerando a incerteza Δx pequena, teremos (Cálculo I):

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x.$$

- Como dy/dx pode ser negativo, usamos o módulo:

$$\Delta y = \left|\frac{dy}{dx}\right|\Delta x$$

Propagação de incertezas

Regra geral

- Considere que uma grandeza Y é uma função f arbitrária de N outras grandezas $X_1, X_2, \dots, X_N$:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N).$$

- Suponha que as medições de $X_1, X_2, \dots, X_N$ resultem em

$$x_1 \pm \Delta x_1, \quad x_2 \pm \Delta x_2, \quad \dots, \quad x_N \pm \Delta x_N.$$

- Nesse caso, o valor y da grandeza Y será

$$y = f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_N).$$

- A incerteza Δy é obtida pela seguinte regra:

$$\boxed{\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_N}\Delta x_N\right)^2}\ .}$$

Propagação de incertezas

Regra geral*

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_N}\Delta x_N\right)^2}\,.$$

- Esta regra é uma generalização da regra anterior.
- As incertezas Δx_i das grandezas medidas diretamente são ponderadas por $\partial y/\partial x_i$, que avaliam o quanto o resultado da medição varia com a mudança em cada x_i.
- Cada termo $(\partial y/\partial x_i)\Delta x_i$ quantifica a incerteza **parcial** em y devido apenas à incerteza Δx_i da medida correspondente.

*Regra válida quando as grandezas x_i são independentes entre si.

Propagação de incertezas

- Para o caso **particular** em que

$$y = a x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_N^{p_N},$$

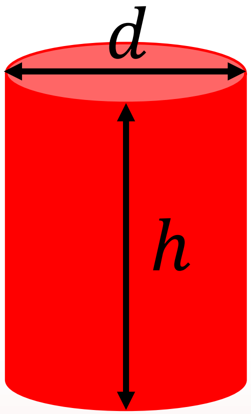
onde a é uma constante e os expoentes $p_1, p_2, ..., p_N$ são números conhecidos quaisquer, a incerteza Δy pode ser determinada por:

$$\boxed{\Delta y = y \times \sqrt{\left(p_1 \frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(p_2 \frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(p_N \frac{\Delta x_N}{x_N}\right)^2}\,.}$$

- Esta regra é deduzida da regra geral.
- Nesta equação, os termos $\Delta x_i / x_i$, ponderados pelos expoentes p_i, são as incertezas relativas.
- Em muitos experimentos do Laboratório de Mecânica poderemos calcular a incerteza dessa maneira.

Propagação de incertezas

Exemplo: As dimensões de um cilindro foram medidas com uma régua graduada em milímetros:



$$d = (21{,}35 \pm 0{,}05) \times 10^{-2}\text{m};$$

$$h = (28{,}50 \pm 0{,}05) \times 10^{-2}\text{m}.$$

Determine o volume deste cilindro e sua respectiva incerteza.

- Sabendo que $V = \pi h \left(\frac{d}{2}\right)^2$, teremos

$$\boxed{V = 1{,}02031 \times 10^{-2}\ \text{m}^3.}$$

- <u>Observação</u>: o número de algarismos significativos desse resultado será determinado pelo valor da incerteza.

Propagação de incertezas

- Como $V = \pi h \left(\frac{d}{2}\right)^2$, a incerteza pode ser calculada por qualquer das duas equações vistas anteriormente:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi h d}{2}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\pi d^2}{4}\Delta h\right)^2}$$

ou

$$\Delta V = V \times \sqrt{\left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(1\frac{\Delta h}{h}\right)^2}$$

Propagação de incertezas

- Em ambos casos obtemos:

$$\Delta V = 5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^3.$$

- Lembre-se que a incerteza deve ser fornecida com um (ou, no máximo, dois) algarismo(s) significativo(s).

- Com o valor de $V = 1{,}02031 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$, podemos expressar corretamente o resultado final como:

$$\boxed{V = (1020 \pm 5) \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^3.}$$

→ Para uma introdução mais detalhada ao tópico “Análise de Incertezas”, consulte nosso material de apoio em https://www.fisica.ufmg.br/ciclo-basico/disciplinas/feb-mecanica/

Gráficos

Gráficos

Fornecida uma tabela com dados de duas grandezas físicas que se relacionam, a construção de um gráfico nos auxilia a:

- Visualizar de forma direta e rápida a relação entre as grandezas.
- Interpretar o fenômeno físico.
- Obter informação quantitativa a partir da análise gráfica.

Exemplo: dados de tensão (*V*) e corrente (*I*) para aferição da resistência (*R*) elétrica de um elemento resistivo ôhmico.

Tensão ($\pm 0,1$ V)	Corrente ($\pm 0,001$ A)
1,0	0,052
2,0	0,098
3,0	0,151
4,0	0,195
5,0	0,244

Gráficos

Essas grandezas são relacionadas por

$$V = RI.$$

Vamos construir o gráfico *V*x*I*, o que significa que os dados de *V* serão colocados na coluna Y (eixo *y*) e os dados de *I* na coluna X (eixo *x*) do programa gráfico.

Tensão ($\pm 0,1$ V)	Corrente ($\pm 0,001$ A)
1,0	0,052
2,0	0,098
3,0	0,151
4,0	0,195
5,0	0,244

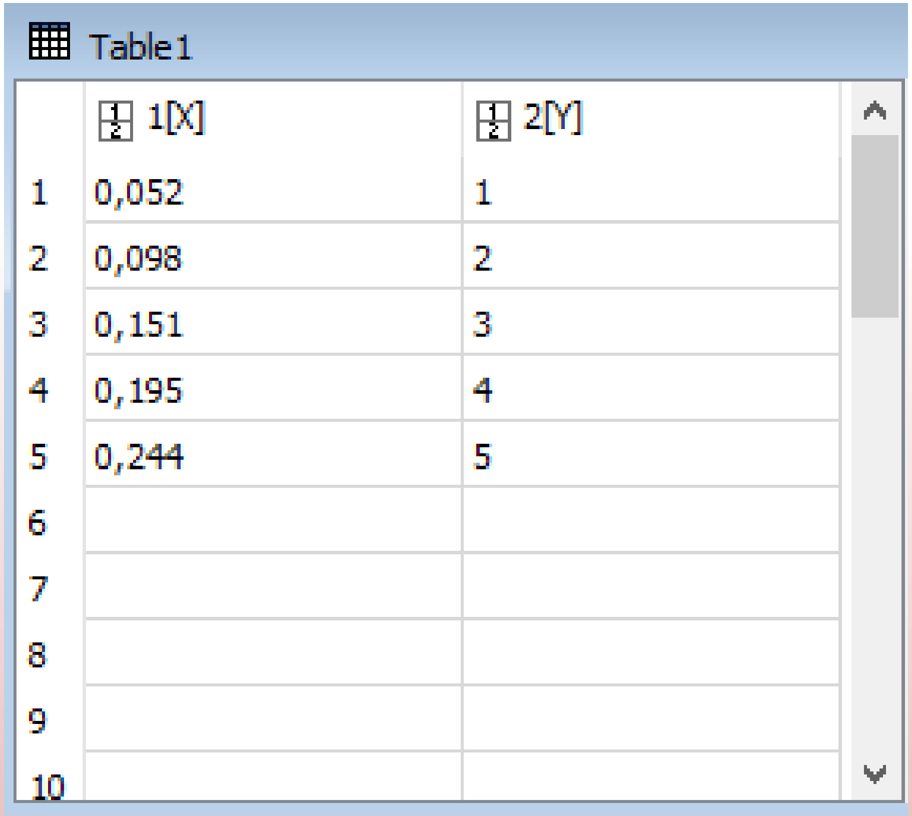


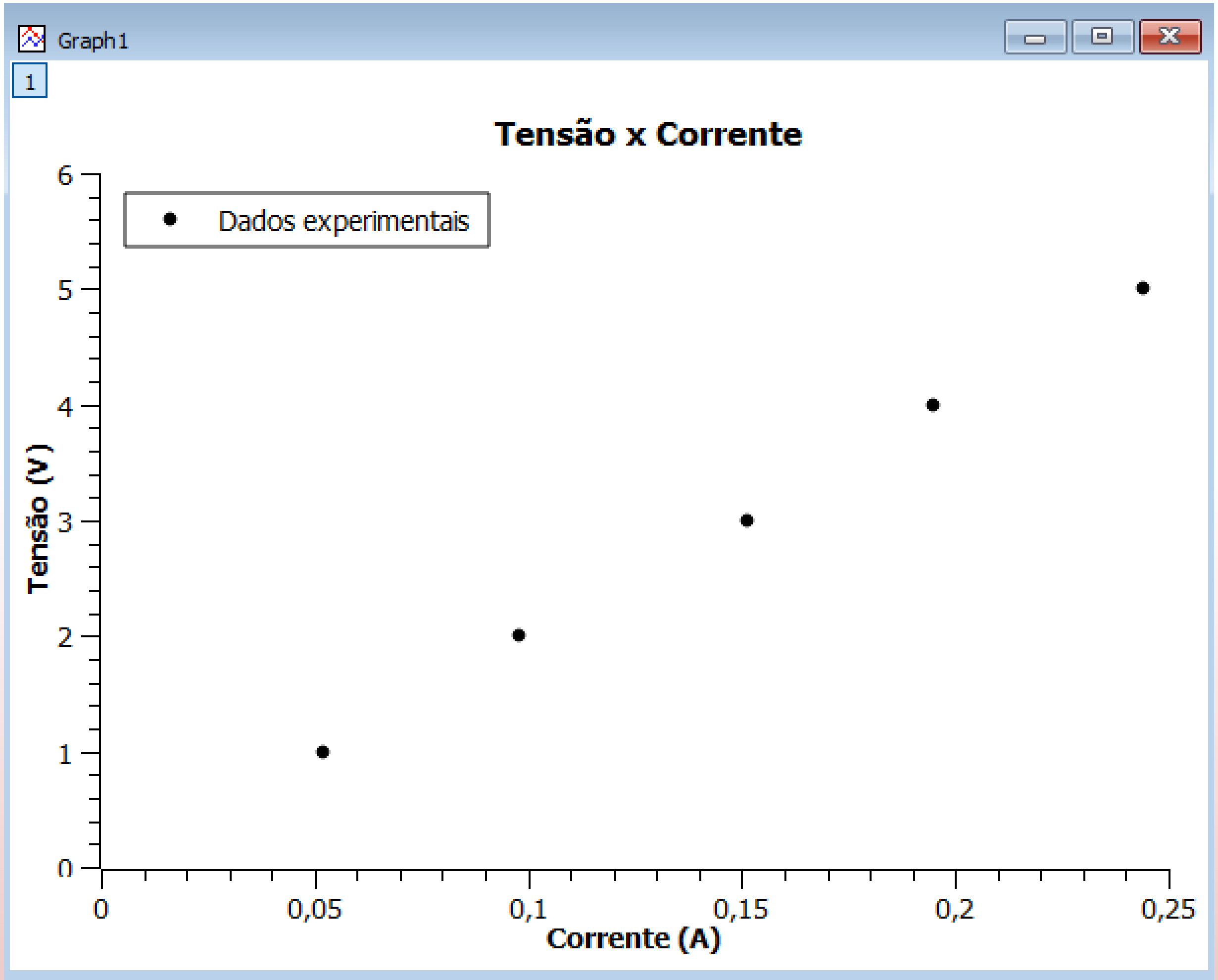
Table1

	1[X]	2[Y]
1	0,052	1
2	0,098	2
3	0,151	3
4	0,195	4
5	0,244	5
6		
7		
8		
9		
10		

Atenção! Aqui estamos usando o SciDavis.

Gráficos

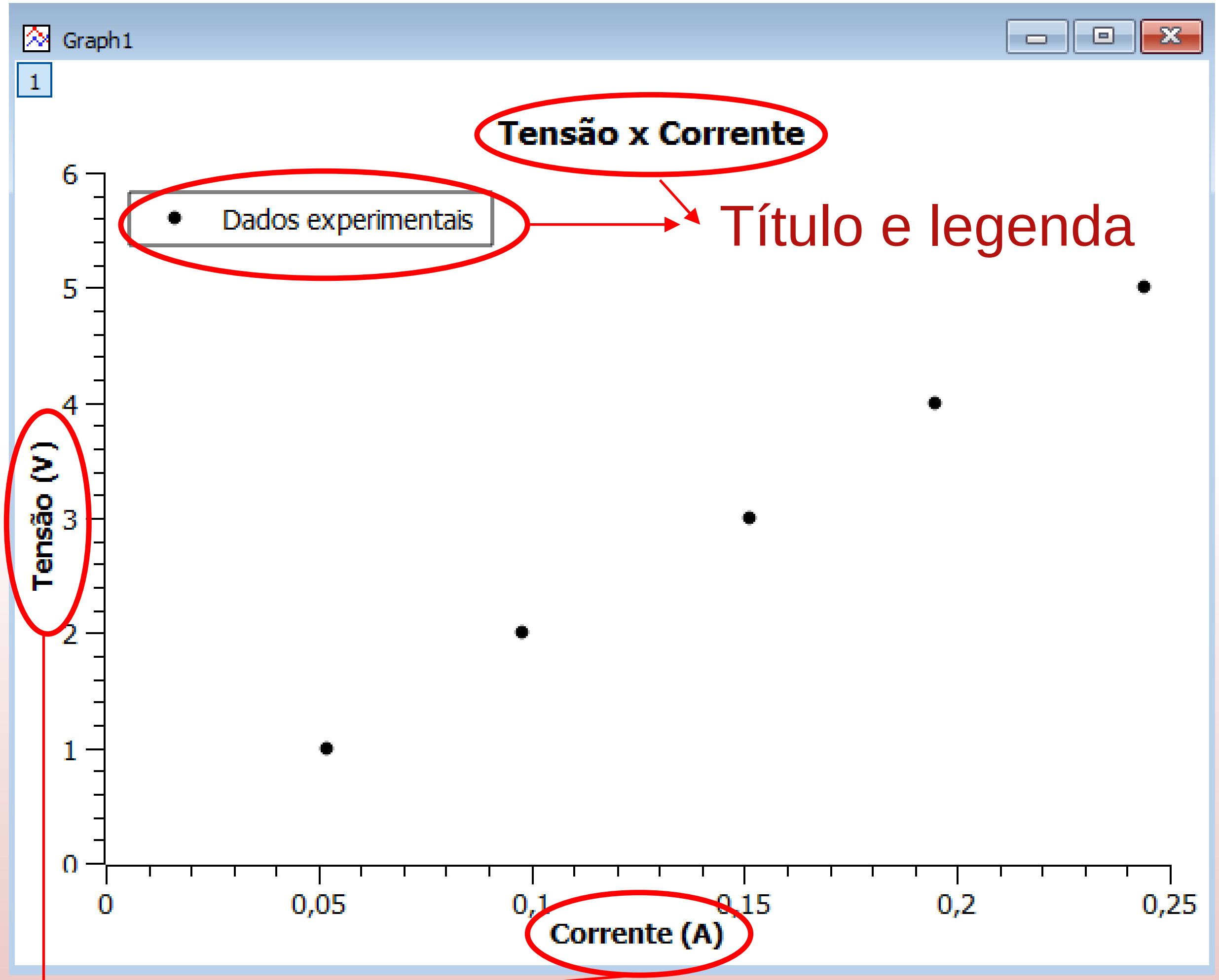
Com o gráfico podemos visualizar a relação entre tensão e corrente.



Para gráficos com poucos pontos usamos símbolos para identificá-los

Gráficos

As informações em destaque (principalmente as dos eixos *x* e *y*) são essenciais para se entender e interpretar um gráfico.



Eixos com as grandezas e suas unidades

Ajuste de curvas

Ajuste de curvas

- Ajustar uma curva a um conjunto de dados experimentais é determinar a função $y(x)$ que melhor representa a tendência geral desses dados.

- Através do ajuste obtemos informações quantitativas do fenômeno físico em estudo, determinando os **parâmetros da curva** $y(x)$ que mais se aproxima dos pontos experimentais.

Exemplos:

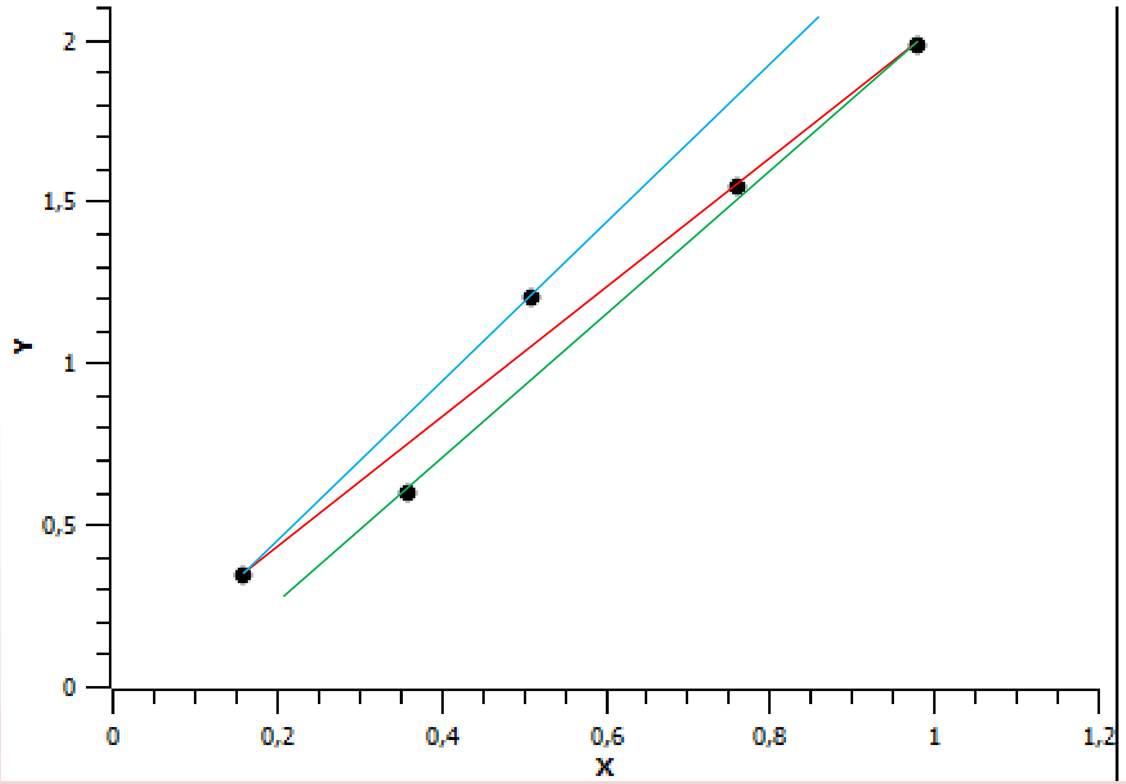
Lab. Mecânica

- Ajustes polinomiais:
  - Linear: $y = a_1 x + a_0 \rightarrow \text{parâmetros } (a_1, a_0)$;
  - Quadrático: $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \rightarrow \text{parâmetros } (a_2, a_1, a_0)$;
  - Grau *n*: $y = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \rightarrow \text{parâmetros } (a_n, \ldots, a_1, a_0)$.
- Ajuste exponencial: $y = a_0 e^{-a_1 x} \rightarrow \text{parâmetros } (a_1, a_0)$
- Etc.

Ajuste de curvas

Suponha que em um experimento foram medidos valores de duas grandezas físicas X e Y que se relacionam linearmente, i.e., $Y = CX$.

Y	X
0,34	0,16
0,6	0,36
1,2	0,51
1,54	0,76
1,98	0,98



- Há infinitas retas que representam o comportamento dos pontos.
- Como determinar a reta $y = Ax + B$ que melhor se ajusta a estes pontos?

Ajuste de curvas

Método dos mínimos quadrados

- Minimiza a discrepância entre os dados (x_i, y_i) e os pontos da curva obtida $(x_i, Ax_i + B)$, através da minimização da soma dos quadrados das distâncias entre estes pontos:

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} (y_i - Ax_i - B)^2$$

- Para determinar os parâmetros *A* e *B*, fazemos

$$\frac{\partial \delta}{\partial A} = -2\sum_{i=1}^{m} (y_i - Ax_i - B)x_i = 0,$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial B} = -2\sum_{i=1}^{m} (y_i - Ax_i - B) = 0,$$

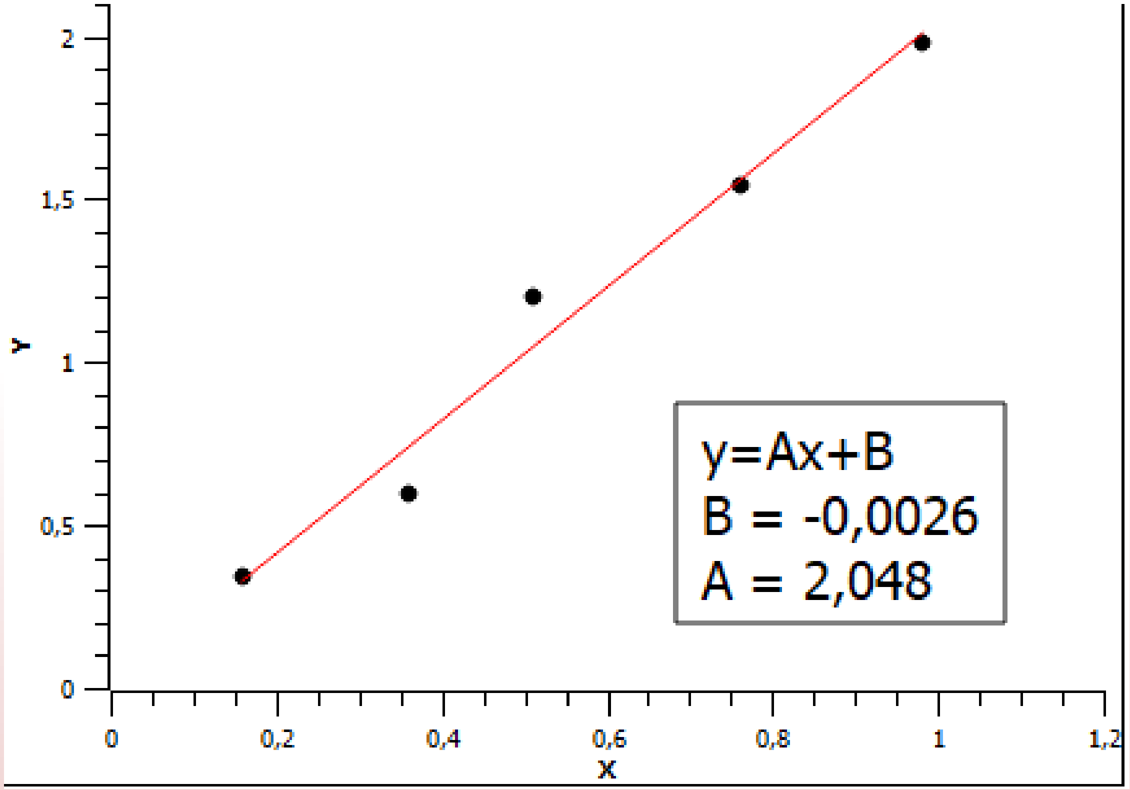
  e resolvemos o sistema de equações gerado. As incertezas de *A* e *B* também podem ser obtidas aplicando-se a propagação.

- Para um ajuste polinomial de ordem *n*, o método é generalizado e produz um sistema de *n*+1 equações.

Ajuste de curvas

Suponha que em um experimento foram medidos valores de duas grandezas físicas X e Y que se relacionam linearmente, i.e., $Y = CX$.

Y	*X*
0,34	0,16
0,6	0,36
1,2	0,51
1,54	0,76
1,98	0,98



- **Exercício**: usando os dados da tabela, resolva o sistema de equações do slide anterior e obtenha os parâmetros A e B.

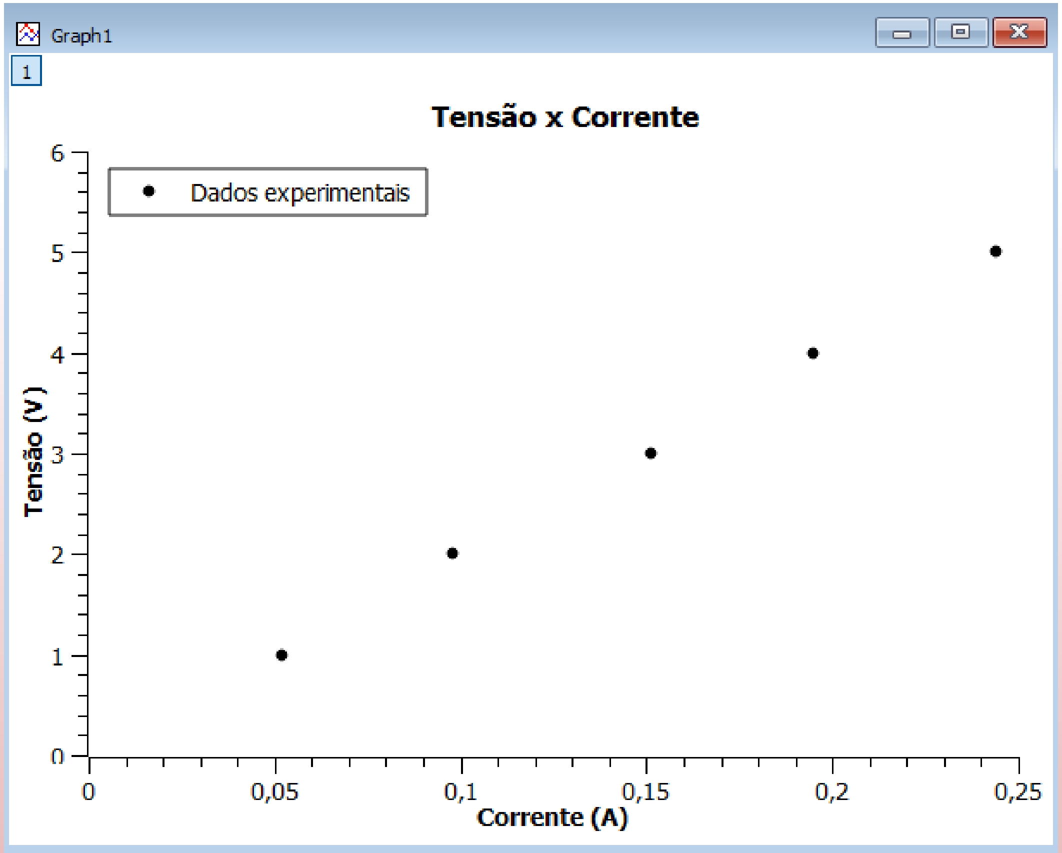
Ajuste de curvas

Voltando ao exemplo inicial:

Como obter o valor da resistência a partir da análise do gráfico *V*x*I*?

Sabemos que *V* varia linearmente com *I* (*V*=*RI*).

Tensão ($\pm 0,1$ V)	Corrente ($\pm 0,001$ A)
1,0	0,052
2,0	0,098
3,0	0,151
4,0	0,195
5,0	0,244



Ajuste de curvas

Neste caso, um ajuste linear (regressão linear) determinará a equação da reta que melhor se ajusta aos dados.

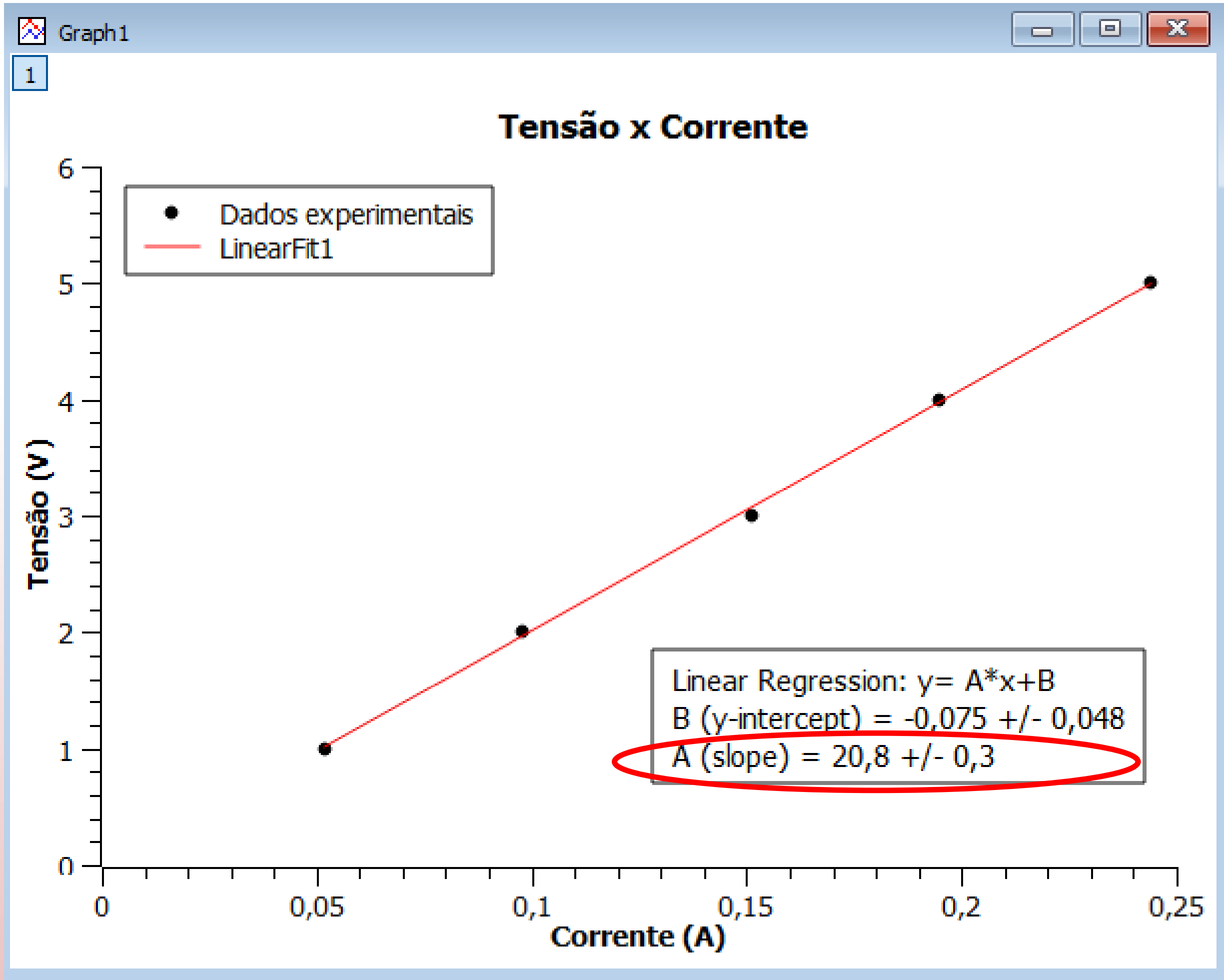
- O ajuste de uma reta

$$y = Ax + B$$

fornece os valores dos parâmetros *A* (inclinação) e *B* (termo independente) com suas respectivas incertezas.

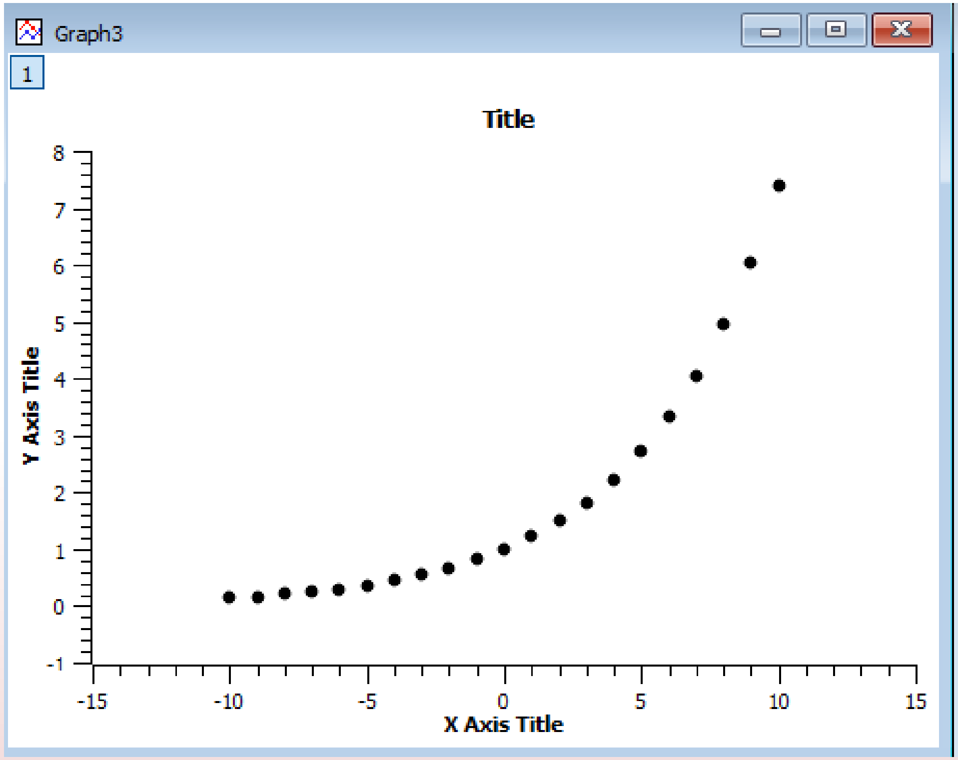
- Como *y=V*, *x=I*, temos que *R=A.* Portanto

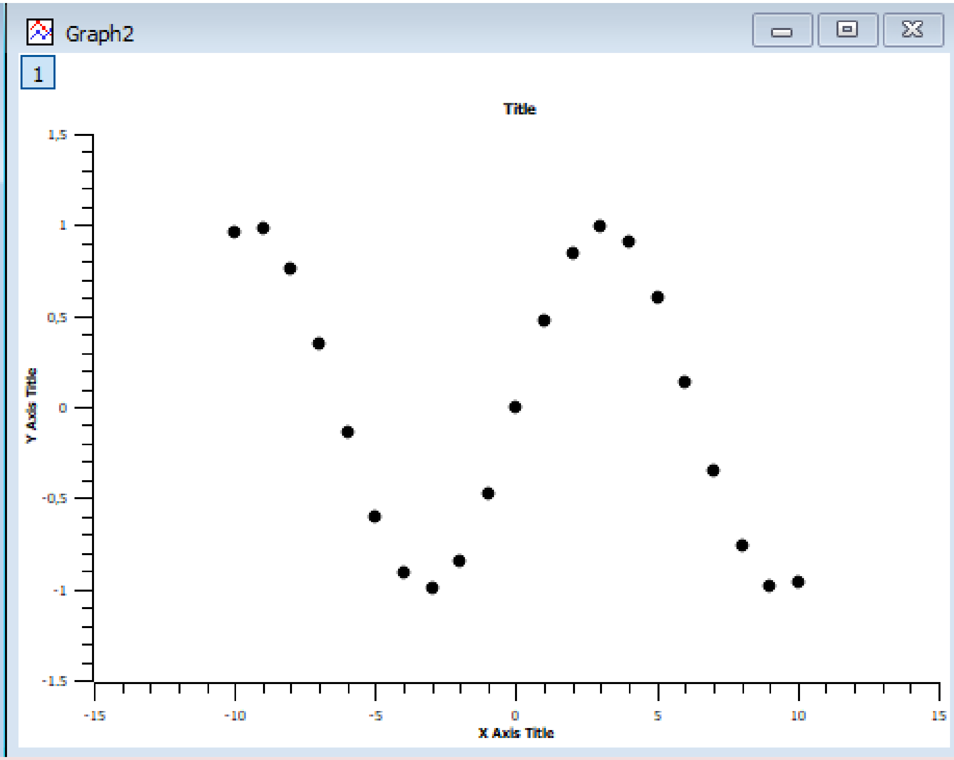
$$R = (20{,}8 \pm 0{,}3)\Omega$$



Ajuste de curvas

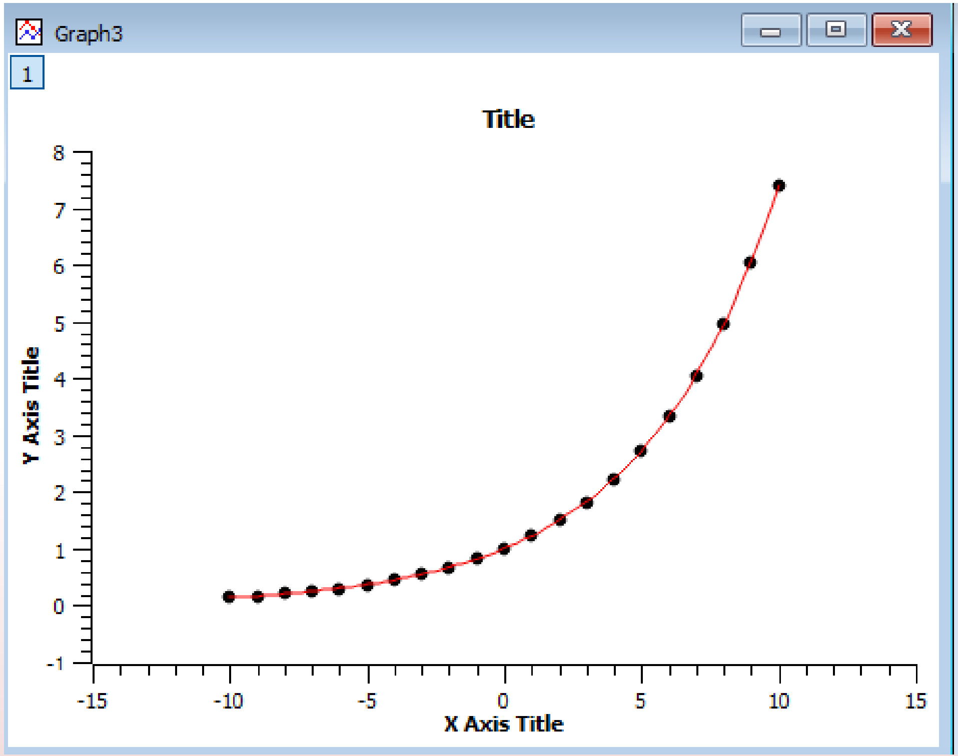
É razoável ajustar uma reta a esses dados?

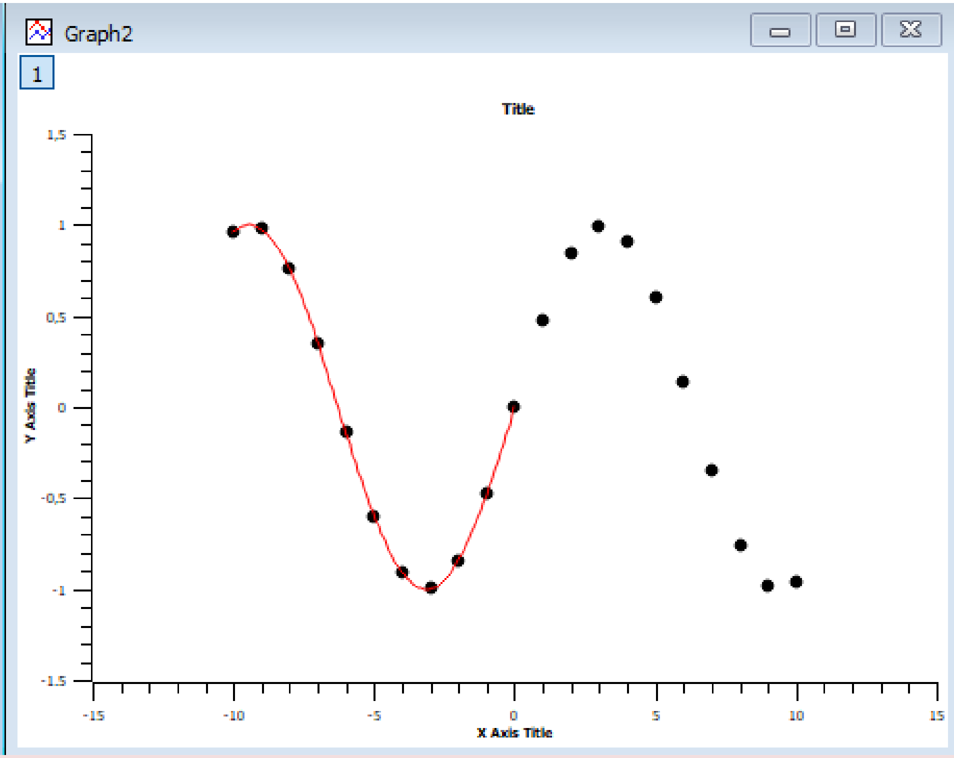




Ajuste de curvas

Não! Devemos fazer ajustes não lineares.





Ajuste com $y = Ae^{Bx}$ Ajuste com $y = \sin(Ax + B)$

Linearização de gráficos

Linearização de gráficos

- Frequentemente, duas grandezas *x* e *y* se relacionam de forma não linear. Exemplos:

  1. $y = ax^2 + b$
  2. $y = be^{ax}$
  3. $y = ax^2 + bx$

- Em alguns casos é possível definir novas grandezas que sejam funções das originais e obedeçam uma relação linear entre si.

  1. Fazendo $X = x^2$ teremos $y = aX + b$
  2. Aplicando o logaritmo: $\boxed{\ln y} = \boxed{\ln b} + \boxed{a}\boxed{x}$

     $$\boxed{Y} = \boxed{B} + \boxed{a}\boxed{x}$$
  3. Não é possível linearizar

- Após a linearização, é possível fazer a análise do gráfico via regressão linear. <u>Não confundir linearização com regressão linear.</u>

Exercícios em sala de aula

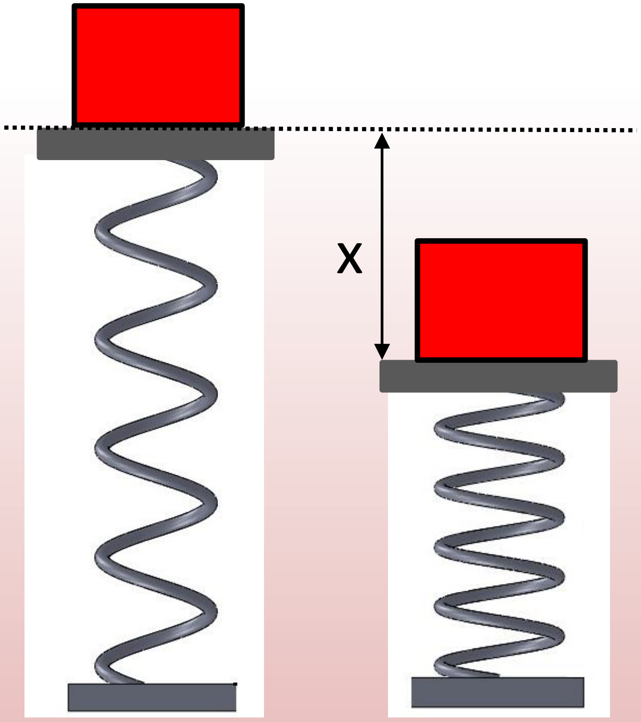
Exercício 1

Considere uma mola de constante elástica

$$k = (120 \pm 10)\ \text{N/m}.$$

Utilizando seis objetos de massas conhecidas, medimos o deslocamento da plataforma após a compressão da mola e obtemos os seguintes resultados:

Compressão (m)	Massa (kg)
0,016	0,20
0,033	0,40
0,049	0,60
0,065	0,80
0,083	1,00

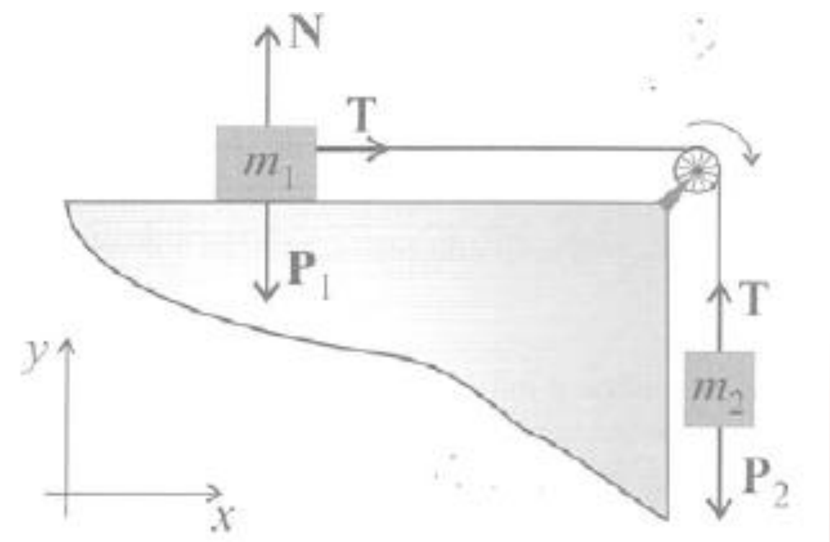


Sabendo que a força exercida sobre a mola é o peso do objeto, $kx = mg$, faça um gráfico e encontre o valor da aceleração da gravidade g.

Neste caso $x = (g/k)\ m$

Exercício 2

Um objeto se move sob a ação de uma força constante em uma superfície sem atrito. Ao medirmos sua posição e velocidade, obtemos os seguintes resultados:



Posição (m)	Velocidade (m/s)
0	1,382
1,0	2,871
2,0	3,826
3,0	4,586
4,0	5,454
5,0	6,056
6,0	6,474

Sabendo que $V^2 = V_0^2 + 2aX$, faça um gráfico linearizado e determine, através de um ajuste linear, a aceleração do objeto e sua incerteza.

Programa de análise de dados

Para plotar e analisar gráficos fora do laboratório, você pode baixar e instalar gratuitamente o seguinte programa:

- SciDAvis: https://sourceforge.net/projects/scidavis/

→ Tutoriais de instalação e utilização: "Material de apoio" em https://www.fisica.ufmg.br/ciclo-basico/disciplinas/feb-mecanica/

Próxima aula

- Preparem-se para a próxima aula lendo o roteiro do experimento **“Pêndulo simples”** disponível na página da disciplina https://www.fisica.ufmg.br/ciclo-basico/disciplinas/feb-mecanica/

- O experimento será feito de forma coletiva e os resultados deverão ser entregues conforme definido pelo(a) professor(a), que conduzirá a prática.

- O objetivo é aplicar o que foi visto nas Aulas 1 e 2 através de um experimento simples. Sempre que necessário, revise o conteúdo destas aulas e os materiais de apoio na nossa página.