

Henrique de Paiva Costa

Formalismo Hamiltoniano das Perturbações Cosmológicas Primordiais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Nelson de Oliveira Yokomizo

Belo Horizonte

2021

Agradecimentos

Em tempos de crise, fica bastante claro ao que devemos ser gratos.

Gostaria de começar agradecendo ao meu orientador, Nelson de Oliveira Yokomizo, não somente pelo conhecimento adquirido e pelas discussões importantíssimas que tivemos ao longo desses anos, mas também por sua paciência e cumplicidade durante toda pandemia. Foram tempos difíceis e estranhos para todos nós, mas o professor Yokomizo soube como se adequar e guiar seus alunos, permitindo que conseguissem dar prosseguimento aos trabalhos apesar de todas as dificuldades.

Agradeço também à minha família: minha mãe Cibeli, meu pai José, minha irmã Marina, meu sobrinho Vitor e minha vó Izabel, que me acolheram em meio ao caos e me mostraram o que é amor incondicional. É sempre bom saber que existe um lugar que podemos chamar de casa, independente do que está acontecendo no mundo. Gostaria de agradecer também ao meu tio Vitor Hugo e à minha tia Delma, que sempre me ajudaram e me receberam prontamente em sua casa quando foi necessário. Espero que um dia possa retribuir toda essa gentileza, tão importante para mim desde o dia em que me mudei para Belo Horizonte.

Aos meus colegas do GFT, Filipe Menezes, Felipe Guisoli, Bruna Sahdo, João Pedro, Eggon Viana, Lucas Montese, Teresa Antunes e Natália Móller, por todo companheirismo, pelas discussões e pelos diversos estudos que fizemos juntos. O entusiasmo de vocês me faz sempre lembrar porque eu escolhi a Física.

Aos meus amigos da UFMG, em especial ao Luís, que sempre me recebeu em sua sala e escutava todas as minhas dúvidas e problemas independente do que estivesse fazendo, ao José Júnior, por todas as longas conversas que tivemos sobre física, sobre música e sobre a vida, e ao Pedro, meu grande companheiro apaixonado por definições que me ajudou tanto durante toda minha formação acadêmica. Também aos amigos fora da UFMG, que seguiram firmes durante toda a pandemia, em especial ao Rafael e ao Renan, que tornaram esse período de isolamento muito menos solitário.

Aos meus anjos da guarda Ana Clara e Bruno José, que souberam me ouvir com cuidado e me aconselhar num dos momentos mais sombrios da minha vida. Devo minha vida a vocês e espero que saibam disso.

Aos meus professores e ao pessoal do Departamento de Física da UFMG, sem os quais esse trabalho seria impossível. Obrigado pela oportunidade e pela confiança.

Por fim, gostaria de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, discutimos o formalismo canônico que descreve a evolução das perturbações cosmológicas. Começamos apresentando os métodos relacionados ao formalismo Hamiltoniano envolvendo vínculos, mostrando qual a origem desses vínculos e como sua presença afeta a análise canônica.

Em seguida, apresentamos o formalismo ADM, que é a descrição das equações de Einstein na forma de um sistema Hamiltoniano vinculado, feita através da folheação do espaço-tempo em folhas espaciais. Mostramos como essa folheação induz uma métrica sobre as folhas espaciais, define o campo temporal e por consequência define também a noção de derivada temporal. A partir disso, estabelecemos a forma da Hamiltoniana da Relatividade Geral.

Por fim, aplicamos o formalismo ADM ao contexto da cosmologia inflacionária. Consideramos um modelo cosmológico com conteúdo de matéria dado por um campo escalar com potencial arbitrário. Mostramos como as simetrias associadas ao princípio cosmológico simplificam o problema para as variáveis relativas ao plano de fundo (*background*), sobre as quais desenvolvemos a teoria de perturbações lineares para obter a Hamiltoniana que descreve a dinâmica dessas perturbações, chegando nos vínculos e na equação que descreve a evolução dessas perturbações.

Palavras-chave: Cosmologia, Teoria Inflacionária, Perturbações Cosmológicas, Formalismo Hamiltoniano.

Abstract

In this dissertation, we discuss the canonical formalism that describes the evolution of cosmological perturbations. We start by presenting the methods associated with the Hamiltonian formalism for constrained systems, then describe the origin of the constraints and discuss their origin and how they affect the canonical analysis.

After that, we present the ADM formulation, which describes Einstein's equations as a constrained Hamiltonian system by foliating spacetime into spatial sheets. We show that this foliation induces a metric over the spatial sheets, defines the temporal field and, as a direct consequence, also defines the notion of time derivative. From this, we establish the Hamiltonian formalism of General Relativity.

Finally, we apply the ADM formalism to the context of inflationary cosmology. We consider a cosmological model for a universe filled with a scalar field with a generic potential. We show how the symmetries associated with the cosmological principle simplify the problem for the background variables, over which we develop the linear perturbation theory to obtain the Hamiltonian that describes the dynamics of said perturbations, establishing the constraints of the system and the equations of motion that describe the evolution of the perturbations.

Keywords: Cosmology, Inflationary Theory, Cosmological Perturbations, Hamiltonian Formalism.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS	15
2.1	Sistemas Dinâmicos de Partículas	15
2.1.1	Cinemática e Dinâmica Lagrangiana	15
2.1.2	Formulação Hamiltoniana	18
2.2	Teoria Clássica de Campos	23
3	FORMALISMO ADM	29
3.1	Folheação (1+3)	30
3.2	Derivada Temporal	35
3.3	Decomposição da métrica	38
3.4	Relações de Curvatura	39
3.5	Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral	43
4	PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS	47
4.1	Plano de Fundo (FLRW)	47
4.1.1	Princípio Cosmológico	47
4.1.2	Dinâmica do Plano de Fundo	49
4.2	Perturbações no Universo Plano	52
4.2.1	Variáveis Dinâmicas	52
4.2.2	Decomposição SVT e Liberdade de Calibre	54
4.2.3	Decomposição SVT no espaço de Fourier	57
4.2.4	Hamiltoniana das perturbações cosmológicas	58
5	CONCLUSÕES	63
	REFERÊNCIAS	67
	APÊNDICES	69
	APÊNDICE A – EQUAÇÃO DE RICCI	71
	APÊNDICE B – CÁLCULO DAS SÉRIES PERTURBATIVAS DOS VÍNCULOS	73

1 Introdução

A teoria da Relatividade Geral de Einstein nos permitiu, de forma inédita, desenvolver teorias testáveis sobre a evolução do universo. Desde então, diversas tentativas foram feitas para se obter um modelo teórico capaz de descrever o universo em larga escala. Dentre as consequências importantes da aplicação da teoria da Relatividade Geral nessa escala está o fato de que um Universo estático é instável, o que implica que vivemos em um universo dinâmico. Por isso, tais modelos teóricos contêm inevitavelmente uma descrição da dinâmica do universo. Um dos exemplos mais conhecidos foi proposto por Friedmann, que partiu da hipótese de um universo homogêneo e isotrópico, o que tornou possível encontrar uma solução analítica para as equações de Einstein em escala cosmológica [1].

Apesar de considerável avanço no campo teórico da cosmologia moderna, dados observacionais eram inicialmente bastante escassos, o que tornava difícil a checagem dos modelos que surgiam. Um dos primeiros grandes avanços no campo observacional se deu quando Hubble constatou, através da medição do desvio para o vermelho e distância de corpos celestes distantes, que o universo estava se expandindo [2]. Outra descoberta particularmente importante foi a da Radiação Cósmica de Fundo (CMB), uma distribuição de radiação eletromagnética com espectro de corpo negro que pode ser detectada em qualquer direção da esfera celeste [3]. Tal descoberta tornou a ideia de um universo homogêneo e isotrópico mais atraente, além de ser uma importante confirmação de uma previsão teórica do modelo do Big Bang [4]. Um terceiro dado observacional, no entanto, levantou outras questões sobre esse modelo: através da observação de Supernovas do tipo Ia [5], foi constatado que o universo estava se expandindo de forma acelerada, o que foi surpreendente pois acreditava-se que essa expansão deveria acontecer de maneira desacelerada devido ao caráter atrativo da interação gravitacional. Era então necessário que houvesse alguma fonte de pressão negativa, capaz de superar essa atração gravitacional exercida pela matéria conhecida. Essa ideia resgatou o conceito de uma constante cosmológica Λ , pois de acordo com o estudo feito por de Sitter [6], sabia-se que um universo em que apenas a constante cosmológica estivesse presente apresentaria um quadro de expansão contínua e acelerada. Essa fonte de pressão negativa recebeu então o nome de energia escura e assim foi criado o modelo cosmológico mais popular até hoje, conhecido como Λ CDM ou modelo padrão. Havia ainda um outro problema: a radiação proveniente de regiões que nunca tiveram conexão causal estavam em equilíbrio térmico. Para sanar essa contradição, foi proposto o cenário inflacionário, que se trata de um período no universo primordial no qual sua expansão seria acelerada, resultando num crescimento exponencial que justificaria tal equilíbrio térmico [7]. As causas da inflação e do seu período finito de duração ainda são desconhecidas.

Nas últimas duas décadas, o campo da cosmologia deu um grande salto. Isso se deve em boa parte ao enorme sucesso de missões espaciais de coleta de dados. Em particular, a missão Planck [8], conduzida entre os anos de 2009 e 2013, realizou as medições mais precisas da Radiação Cósmica de Fundo que se tem até o presente momento. Esses novos dados observacionais permitiram como nunca antes na história da cosmologia a verificação da consistência de modelos teóricos por meio de dados observacionais, fazendo com que vários modelos fossem descartados. O caso do modelo padrão é particularmente interessante, pois ao compararmos as previsões teóricas para a Radiação Cósmica de Fundo com os dados coletados pelo Planck é possível notar que a compatibilidade entre os dois é formidável [8]. Contudo, estudos recentes vêm mostrando que existem inconsistências entre o modelo padrão e os dados do Planck que não podem ser simplesmente ignoradas [9]. Essas inconsistências motivaram diversos estudos sobre possíveis adaptações no modelo padrão de forma a atenuá-las, bem como outros que visam resolvê-las através da formulação de uma nova física. Sendo assim, para entender o que vem acontecendo no atual cenário da cosmologia, é necessário primeiramente entender o que são essas medições e como obter essas grandezas a partir de um modelo teórico. A base dessa análise está nas chamadas perturbações cosmológicas, a partir das quais é possível obter os espectros de potência usados na comparação de resultados teóricos com dados observacionais.

Existem diferentes formas de abordar as perturbações cosmológicas. Neste trabalho, fazemos uma revisão minuciosa de como obter a dinâmica dessas perturbações através do formalismo canônico da teoria de Einstein [10]. O apelo do formalismo Hamiltoniano é evidente, afinal o material referente a esse método de análise é extenso e rico, além de nos fornecer um olhar totalmente novo às equações de Einstein, permitindo-nos estudar a dinâmica do universo de forma mais familiar e elegante. Além disso, para descrever o universo primordial é preciso quantizar as perturbações cosmológicas, o que pode ser feito aplicando a quantização canônica ao formalismo Hamiltoniano clássico. Ao fazer esse estudo detalhadamente até chegar na dinâmica canônica das perturbações cosmológicas em um modelo inflacionário bastante consolidado, podemos então analisar as alterações de interesse a partir desse modelo. Por exemplo, podemos fazer alterações na ação de Einstein-Hilbert para obter uma nova dinâmica, pois os passos que se seguem a partir dessa nova ação serão os mesmos dos que foram feitos a partir da ação original. Outro exemplo seria adequar os métodos empregados ao universo plano a universos fechados.

O presente trabalho será organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 fazemos uma revisão geral do formalismo Hamiltoniano envolvendo vínculos. Começamos estudando sistemas de partículas, revisando tanto a cinemática quanto a dinâmica desses sistemas, apresentando a origem dos vínculos e seu efeito na análise. Em seguida, adequamos essas noções para o contexto de campos clássicos.

No Capítulo 3, fazemos uso dessas ferramentas para descrever as equações de

Einstein na forma de um sistema Hamiltoniano vinculado. Fazemos isso através da folheação do espaço-tempo, que induz uma métrica sobre cada uma das folhas espaciais a partir da métrica espaço-temporal. Usando a métrica induzida como variável dinâmica e por meio de algumas relações de curvatura, descrevemos então a ação de Einstein-Hilbert em termos das variáveis desejadas, a partir da qual obtemos a Hamiltoniana da Relatividade Geral e seus respectivos vínculos.

No Capítulo 4, discutimos as simetrias características do universo FLRW plano, mostrando seu efeito sobre a Hamiltoniana da Relatividade Geral. A partir dessa Hamiltoniana, fazemos a análise dinâmica das variáveis de plano de fundo, obtendo suas equações de movimento. Fazemos então a expansão em série perturbativa em primeira ordem nas variáveis dinâmicas, a partir da qual obtemos também a série perturbativa dos vínculos e da Hamiltoniana. Finalmente, impondo as devidas condições de consistência, obtemos a Hamiltoniana das perturbações lineares bem como suas respectivas equações de movimento. Por fim, no Capítulo 5, apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

2 Sistemas Hamiltonianos Vinculados

As equações de Einstein formam um sistema de equações não-lineares de segunda ordem. No entanto, parte dessas equações é de primeira ordem e pode ser vista como condições sobre as demais. Isso nos permite descrevê-las como um sistema Hamiltoniano vinculado, tomando como ponto de partida a ação de Einstein-Hilbert. Para auxiliar na compreensão dessa abordagem, conhecida como Formalismo ADM (em homenagem a Arnowitt, Deser e Misner), faremos neste capítulo uma discussão a respeito da formulação canônica envolvendo vínculos. Para isso, faremos uma recapitulação sobre o formalismo Hamiltoniano de partículas, introduzindo o conceito de vínculos e mostrando o efeito desses vínculos na análise. Feito isso, mostraremos como essas ideias podem ser adequadas quando lidamos com campos ao invés de partículas, permitindo-nos aplicar os métodos discutidos no contexto específico da relatividade geral.

2.1 Sistemas Dinâmicos de Partículas

2.1.1 Cinemática e Dinâmica Lagrangiana

Para começar, precisamos de uma maneira de descrever a evolução de sistemas. Para isso, usamos o conjunto de funções $\{q^i\}$, $q^i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$, chamadas de **coordenadas generalizadas**. Essas coordenadas são escolhidas de tal forma que quaisquer vínculos holônomos sejam trivialmente satisfeitos, ou seja, relações da forma

$$f(q^1(t), \dots, q^N(t)) = 0 \quad (2.1)$$

sejam triviais para todo $t \in I$. Fazemos isso para que possamos trabalhar com o menor número de coordenadas possível, afinal caso houvesse algum vínculo holônomo que não fosse trivialmente satisfeito, pelo teorema da função implícita, poderíamos descrever localmente uma coordenada em termos das demais. Sendo assim, N é o menor número de coordenadas necessárias para descrever completamente a evolução do sistema em questão (sem levar em conta as restrições impostas pela dinâmica) e recebe o nome de **número de graus de liberdade** do sistema. O espaço gerado pelas coordenadas generalizadas é chamado **espaço de configuração** do sistema e será denotado por Q .

Um sistema pode sair de uma configuração inicial $q_o = (q_o^1, \dots, q_o^N)$ para uma configuração final $q_f = (q_f^1, \dots, q_f^N)$ de diversas formas diferentes. Em mecânica clássica, assume-se que essa transição ocorra de forma contínua e diferenciável. Isso significa que $\dot{q}^i := \partial q^i / \partial t$ é bem definida durante toda transição. Dessa forma, a evolução do sistema descreve uma curva diferenciável em Q . Para selecionar qual curva representará a evolução

do sistema, é necessário definir a **dinâmica**, ou seja, as causas do movimento. A dinâmica que rege o sistema é definida a partir da **Lagrangiana** $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, sendo TQ o fibrado tangente do espaço de configuração.

Dado um intervalo $I = [t_o, t_f]$, a configuração inicial do sistema q_o e a configuração final q_f , selecionaremos as curvas que descrevem movimentos permitidos (ou físicos) de acordo com o **princípio da ação mínima**. Definindo a ação como:

$$S = \int_{t_o}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t)) dt, \quad (2.2)$$

iremos escolher a curva que começa em q_o , termina em q_f e que mantém a ação estacionária, ou seja

$$\delta S = 0,$$

sob variações δq^i em torno de q^i , com a condição de que $\delta q^i(t_o) = \delta q^i(t_f) = 0$. Em outras palavras, queremos curvas cuja ação S , dada pela Lagrangiana L , não varie para pequenas mudanças na curva.

As condições necessárias para se obter uma ação estacionária são dadas pelas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

que podem ser reescritas em termos da aceleração generalizada na forma

$$\ddot{q}^i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \frac{\partial L}{\partial q^j} - \dot{q}^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j}. \quad (2.4)$$

Trata-se então de um sistema de N equações diferenciais de segunda ordem em q . Nota-se a partir da equação acima que \ddot{q} é determinado de forma unívoca a partir de q e \dot{q} se, e somente se, a matriz $\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j$ for inversível, ou seja, se o determinante

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \quad (2.5)$$

for diferente de zero. Caso o determinante seja nulo, isso implica em relações entre componentes da aceleração, tornando o sistema indeterminado. Em outras palavras, teremos parâmetros livres nas soluções dessas equações.

A forma da matriz $\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j$ sugere a definição do **momento canônico** p_i :

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (2.6)$$

pois assim, a matriz Hessiana acima pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}, \quad (2.7)$$

e podemos interpretá-la como a matriz Jacobiana correspondente à mudança de coordenada $\dot{q}^i \mapsto p_i$. Dessa forma, caso o determinante da matriz Jacobiana da transformação seja diferente de zero, teremos N variáveis p_i linearmente independentes. No entanto, caso esse determinante seja nulo, teremos vínculos entre os momentos p_i dados pela própria definição (2.6).

Ao efetuar essa transformação, podemos descrever a evolução do sistema através das coordenadas (q, p) , onde $p = (p_1, \dots, p_N)$, no lugar de (q, \dot{q}) . O espaço Γ descrito pelas coordenadas (q, p) é chamado de **espaço de fase**. A partir da definição de p_i e dado o posto N_J da matrix Jacobiana $\partial p_i / \partial \dot{q}^j$, teremos um conjunto de $M := N - N_J$ relações

$$C_k(q, p) = 0, \quad k = 1, \dots, M, \quad (2.8)$$

que estabelecem os chamados **vínculos primários** no espaço de fase. Assumiremos que o posto da matrix $\partial p_i / \partial \dot{q}^j$ é constante no fibrado tangente do espaço de configurações ao longo de todo o trabalho. Bem como os vínculos holônomos usados na definição das coordenadas generalizadas q^i , esses vínculos primários limitam o acesso do sistema no espaço de fase. Chamamos a região do espaço de fase delimitada pelos vínculos (ou seja, a região de Γ que satisfaz $C_k(q, p) = 0$) de **superfície de vínculo** \mathcal{C} , cuja dimensão é $2N - M$.

Um exemplo bastante simples de um vínculo primário pode ser visto para o caso em que a Lagrangiana não depende explicitamente de uma das coordenadas da velocidade generalizada. Suponha que \dot{q}^1 não apareça explicitamente na fórmula de L . Sendo assim, temos que $p_1 = \partial L / \partial \dot{q}^1 = 0$, o que estabelece um vínculo primário no espaço de fase: $C_1(q, p) = p_1 = 0$. Isso significa que qualquer que seja a evolução do sistema, ela estará restrita a uma superfície \mathcal{C} em que todos os pontos tem coordenadas que satisfazem $p_1 = 0$ em Γ .

Como podemos observar em (2.6), esses vínculos têm relação direta com L , o que significa que os vínculos surgem da dinâmica imposta através de L sobre o sistema. Apesar dessa definição ter relação direta com as equações de movimento, a transformação de coordenadas nos permite estabelecer os vínculos $C_k(q, p)$ antes de solucionar as equações de movimento. Essa é uma forma interessante de inserir as restrições provenientes da dinâmica na descrição da evolução do sistema, pois essas relações surgem de maneira natural a partir de uma simples transformação de coordenadas.

A partir dos vínculos primários $C_k(q, p) = 0$, é possível obter relações similares, por exemplo, $C_k^2(q, p) = 0$ ou $\sqrt{C_k(q, p)} = 0$. No entanto, é necessário impor condições sobre a forma desses vínculos antes de prosseguir para o formalismo Hamiltoniano, chamadas **condições de regularidade**. Existem diferentes maneiras de formular essas condições, uma delas sendo a seguinte: dado $z = (q, p)$, os vínculos primários $C_k = 0$ devem ser tais que a matriz Jacobiana $\partial C_k / \partial z_n$ tem posto constante M ao longo de toda superfície de vínculos

\mathcal{C} , de forma que localmente os M vínculos podem ser vistos como independentes. Caso os vínculos primários satisfaçam essas condições, os dois teoremas a seguir, extremamente úteis na descrição do formalismo Hamiltoniano com vínculos, são válidos [11]:

Teorema 1. *Se uma função (suave) $G(q, p)$ no espaço de fase se anula na superfície de vínculo \mathcal{C} , então $G = g^k C_k$ para algum conjunto de funções g^k .*

Teorema 2. *Se $\lambda_i \delta q^i + \mu^i \delta p_i = 0$ para variações arbitrárias δq^i e δp_i tangentes à superfície de vínculos \mathcal{C} , então*

$$\lambda_i = f^k \frac{\partial C_k}{\partial q^i},$$

$$\mu^i = f^k \frac{\partial C_k}{\partial p_i},$$

em \mathcal{C} , para algum conjunto de funções f^k .

Com o auxílio dos teoremas (1) e (2), é possível estabelecer a dinâmica Hamiltoniana com vínculos de forma rigorosa e relativamente simples.

Aqui vale a introdução de um conceito bastante útil: a **igualdade fraca** (\approx). Trata-se de uma igualdade verdadeira em \mathcal{C} . Vale ressaltar que a igualdade pode ser verdadeira em outras regiões, possivelmente em todo o espaço de fase. Nesse caso, dizemos que trata-se de uma **igualdade forte** ($=$). Por exemplo, podemos dizer que

$$C_k(q, p) \sin q^1 \approx C_k(q, p) e^{q^1},$$

pois na superfície de vínculos, $C_k = 0$ e a igualdade é válida, o que não é verdade em nenhum ponto fora dessa região. Como toda dinâmica de interesse ocorre sobre a superfície de vínculos, já que os vínculos primários surgem naturalmente da própria definição do momento canônico, é importante levar em conta relações dessa natureza.

2.1.2 Formulação Hamiltoniana

Para estabelecer as equações de movimento em termos das variáveis do espaço de fase Γ , é necessário aplicar uma transformação de Legendre sobre a Lagrangiana, obtendo assim a **Hamiltoniana**

$$H(q, p) = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}), \quad (2.9)$$

que se trata da descrição da dinâmica no espaço de fase. É possível notar que a Hamiltoniana depende somente das variáveis p e q ao analisarmos sua variação:

$$\delta H = \delta \dot{q}^i p_i + \dot{q}^i \delta p_i - \delta L = p_i \delta \dot{q}^i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i.$$

Usando a definição do momento canônico, $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$, o primeiro e o último termo da expressão acima se cancelam, resultando em

$$\delta H = \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i, \quad (2.10)$$

mostrando que a Hamiltoniana depende somente das variáveis do espaço de fase (q, p) . Em outras palavras, qualquer dependência que Hamiltoniana tenha com relação à velocidade generalizada \dot{q}^i se dá através da variável p_i .

No entanto, devido aos vínculos primários estabelecidos quando passamos para o espaço de fase, as variações δp_i não são independentes. Afinal, os vínculos primários impõem restrições sobre p_i que também devem ser obedecidas para suas variações.

Podemos concluir então que a Hamiltoniana é bem definida apenas sobre a superfície de vínculos \mathcal{C} e pode ser estendida arbitrariamente para além dessa região.

Sabendo que a Hamiltoniana é função das variáveis do espaço de fase, sua variação pode ser escrita como

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i.$$

Usando a equação (2.10), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i &= \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i, \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}^i \right) \delta p_i &= 0, \end{aligned}$$

e, a partir do teorema (2), concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i} &= f^k \frac{\partial C_k}{\partial q^i}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}^i &= f^k \frac{\partial C_k}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} - f^k \frac{\partial C_k}{\partial p_i}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + f^k \frac{\partial C_k}{\partial q^i}, \quad (2.12)$$

Vale notar que, dados os momentos canônicos p_i e os fatores f^k , a equação (2.11) oferece uma forma de encontrar as velocidades generalizadas \dot{q}^i . É possível, então, estabelecer a curva no espaço de configurações Q correspondente à evolução do sistema. Apesar dessa imagem ter maior apelo intuitivo, tal retorno ao espaço de configurações não se faz necessário, já que um tratamento puramente Hamiltoniano oferece uma descrição cinemática no próprio espaço de fase.

Dessa forma, podemos lidar com as equações de movimento (2.11) e (2.12), que já incluem os vínculos dinâmicos de forma explícita.

Usando as equações (2.3), podemos reescrever o conjunto de equações de movimento como

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} - f^k \frac{\partial C_k}{\partial p_i}, \quad (2.13)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + f^k \frac{\partial C_k}{\partial q^i}. \quad (2.14)$$

No entanto,

$$f^k \frac{\partial C_k}{\partial p_i} = \frac{\partial(f^k C_k)}{\partial p_i} - \frac{\partial f^k}{\partial p_i} C_k \approx \frac{\partial(f^k C_k)}{\partial p_i},$$

$$f^k \frac{\partial C_k}{\partial q^i} = \frac{\partial(f^k C_k)}{\partial q^i} - \frac{\partial f^k}{\partial q^i} C_k \approx \frac{\partial(f^k C_k)}{\partial q^i},$$

de forma que

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial(H - f^k C_k)}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial(H - f^k C_k)}{\partial q^i}.$$

Finalmente, definindo a Hamiltoniana total $H_{total} := H - f^k C_k$, as equações de movimento podem ser escritas de maneira mais familiar:

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H_{total}}{\partial p_i}, \quad (2.15)$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_{total}}{\partial q^i}. \quad (2.16)$$

Cabe aqui a introdução de uma ferramenta matemática bastante prática para esse tipo de análise: o **colchete de Poisson**. Dadas duas funções f e g definidas no espaço de fase, o colchete de Poisson entre elas é dado por

$$\{f(q, p), g(q, p)\} := \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right). \quad (2.17)$$

Para funções f , g e h , e $a \in \mathbb{R}$, é fácil verificar que o colchete de Poisson satisfaz as seguintes propriedades:

- bilinearidade:

$$\{af + h, g\} = a\{f, g\} + \{h, g\}$$

, e o mesmo vale para a segunda entrada;

- antissimetria:

$$\{g, f\} = -\{f, g\};$$

- regra de Leibniz:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\};$$

- identidade de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0.$$

Podemos então reescrever as equações (2.15) e (2.16) usando os colchetes de Poisson:

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H_{total}\}, \quad (2.18)$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_{total}\}. \quad (2.19)$$

De fato, para qualquer função $F(q, p)$, temos que:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &\approx \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H_{total}}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H_{total}}{\partial q^i} \right) = \{F, H_{total}\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\dot{F} \approx \{F, H_{total}\}. \quad (2.20)$$

É importante ressaltar que, pelo fato dos vínculos primários serem originados diretamente da definição dos momentos canônicos, eles precisam ser verdadeiros durante toda evolução do sistema. Isso significa que o diagrama de fase correspondente à evolução do sistema deve estar contido na superfície de vínculos \mathcal{C} . Essas são as chamadas **condições de consistência**. Podemos expressar essas condições como

$$0 = \dot{C}_k \approx \{C_k, H_{total}\}. \quad (2.21)$$

As condições de consistência podem adicionar novos vínculos à evolução do sistema, chamados de **vínculos secundários**. Como esses vínculos são necessários para satisfazer as condições de consistência dos vínculos primários, eles também devem satisfazer as condições de consistência, o que, por sua vez, pode acarretar em uma terceira geração de vínculos. Esse processo segue até que nenhum vínculo novo seja gerado. Uma vez estabelecidos todos os vínculos necessários, não há nenhuma razão para separar vínculos primários de secundários, o que nos permite rotular os novos vínculos da mesma forma que os vínculos primários, apenas estendendo o alcance do índice k para que comporte os vínculos das gerações posteriores. O surgimento de novos vínculos, claro, implica numa redução do número de graus de liberdade do sistema, então nenhuma consistência com a análise feita para vínculos primários é perdida.

Escrevendo explicitamente a Hamiltoniana total H_{total} , a equação (2.21) fica da forma

$$\begin{aligned}\{C_k, H_{total}\} &= \{C_k, H - f^m C_m\} \\ &= \{C_k, H\} - \{C_k, f^m C_m\} \\ &= \{C_k, H\} - f^m \{C_k, C_m\} - \{C_k, f^m\} C_m \\ &\approx \{C_k, H\} - f^m \{C_k, C_m\}.\end{aligned}$$

A expressão acima induz à introdução de um novo conceito. Dizemos que uma função F é de **primeira classe** se seu colchete de Poisson com qualquer vínculo C_k é fracamente nulo, [11]

$$\{F, C_k\} \approx 0, \quad (2.22)$$

o que também pode ser escrito como

$$\{F, C_k\} = \alpha_k^m C_m,$$

para um conjunto de coeficientes α_k^m . Uma função do espaço de fase que não é de primeira classe é dita de **segunda classe**.

Dessa forma, se o vínculo C_k da equação (2.21) for de primeira classe, a expressão se reduz à

$$0 = \dot{C}_k \approx \{C_k, H\}$$

De fato, para qualquer função F de primeira classe, temos que

$$\dot{F} \approx \{F, H_{total}\} \approx \{F, H\}.$$

Além disso, o colchete de Poisson entre funções de primeira classe é uma função de primeira classe [11]. Sejam F e G funções de primeira classe. Pelo teorema (1), podemos escrever

$$\begin{aligned}\{F, C_k\} &= f_k^m C_m, \\ \{G, C_k\} &= g_k^m C_m,\end{aligned}$$

e, usando a identidade de Jacobi, obtemos

$$\begin{aligned}\{\{F, G\}, C_k\} &= \{F, \{G, C_k\}\} - \{G, \{F, C_k\}\} \\ &= \{F, g_k^m C_m\} - \{G, f_k^n C_n\} \\ &= g_k^m \{F, C_m\} + \{F, g_k^m\} C_m - f_k^n \{G, C_n\} - \{G, f_k^n\} C_n \\ &= g_k^m f_m^n C_n + \{F, g_k^m\} C_m - f_k^n g_n^m C_m - \{G, f_k^n\} C_n \approx 0.\end{aligned}$$

Considerando o caso em que todos os vínculos são de primeira classe, dada uma variável dinâmica F qualquer, podemos definir a seguinte transformação:

$$F(q, p) \mapsto F(q, p) + \{F, \epsilon C_k\}, \quad (2.23)$$

conhecida como **transformação de calibre**, onde ϵ é um parâmetro de controle arbitrariamente pequeno. Devido às condições de consistência, transformações de calibre não alteram a hamiltoniana

$$H(q, p) \mapsto H(q, p) + \{H, \epsilon C_k\} \approx H,$$

e o mesmo vale para vínculos de primeira classe. Ou seja, transformações de calibre levam soluções das equações de movimento e dos vínculos em novas soluções. Por conta disso, os vínculos são ditos *geradores de transformações de calibre* e consideramos que soluções que estejam relacionadas por transformações de calibre sejam tratadas como a mesma solução.

É importante ressaltar que existem métodos rigorosos para lidar com os vínculos de segunda classe, de forma que eles são completamente eliminados do tratamento dinâmico do problema. Um exemplo comum na literatura é o colchete de Dirac [12]. Não nos aprofundaremos aqui na discussão desses métodos. No presente trabalho, lidaremos exclusivamente com vínculos de primeira classe, pois assim podemos separar as grandezas físicas da parte de calibre através de uma transformação na qual os vínculos fazem o papel de momento canônico, como demonstrado em [13].

Essa liberdade de calibre pode ser explorada de forma a facilitar os cálculos ao solucionarmos as equações de movimento. Em relatividade geral, essas transformações estão diretamente associadas à uma escolha de referencial. Por esse motivo, grandezas físicas devem ser invariantes por transformações de calibre, como é o caso da Hamiltoniana.

2.2 Teoria Clássica de Campos

Até agora, as coordenadas do espaço de fase $q^i(t)$ e $p_i(t)$ foram tratadas de forma que $i \in \mathbb{N}$. No entanto, o propósito deste trabalho é discutir a evolução de campos tensoriais relacionados à geometria do espaço e à distribuição de massa no espaço. Por isso, precisamos adaptar o que foi visto na seção anterior para o contexto em que o número de graus de liberdade não é mais finito ou enumerável.

O foco dessa seção não é fazer uma revisão completa sobre teoria clássica de campos, mas sim mostrar quais são as adaptações necessárias no formalismo discutido anteriormente no contexto de campos clássicos.

Um campo tensorial clássico é um mapa que associa cada ponto do espaço-tempo a um tensor. Um campo escalar real ϕ , por exemplo, associa cada ponto do espaço-tempo x um valor real, ou seja, $\phi(x) \in \mathbb{R}$. Por isso não é possível relacionar todos os valores que

descrevem ϕ num determinado instante de tempo a uma lista de números, como era o caso das coordenadas generalizadas q^i . Daí vem a interpretação de que um campo possui um número de graus de liberdade infinito não-enumerável.

É necessário então introduzir conceitos análogos aos que foram usados na seção anterior adaptados para o contexto de campos. O primeiro passo para essa abordagem é introduzir a ideia de **funcional**. Seja Γ um espaço de funções (como por exemplo o conjunto de todos os campos escalares definidos sobre uma variedade), um funcional (real) F em Γ é um mapa da forma

$$\begin{aligned} F : \Gamma &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto F[\phi], \end{aligned}$$

ou seja, é mapa que relaciona funções $\phi \in \Gamma$ a números reais.

Dada uma função ϕ e uma uma variação $\phi + \epsilon\delta\phi$ (com $\epsilon \in \mathbb{R}$ e de forma que $\phi + \epsilon\delta\phi \in \Gamma$), caso o limite

$$\delta F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi + \epsilon\delta\phi] - F[\phi]}{\epsilon} \quad (2.24)$$

exista para qualquer $\delta\phi$, dizemos que F possui **derivada funcional** em ϕ , denotada por $\delta F/\delta\phi(x)$ e definida a partir da relação

$$\begin{aligned} \delta F[\phi] &= \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x), \\ \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi} \delta\phi &= \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x). \end{aligned} \quad (2.25)$$

A expressão acima é análoga à noção de derivada direcional encontrada em cálculo de várias variáveis

$$\vec{\nabla} f(p) \cdot \vec{v} = \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p v^i,$$

ou seja, $\delta\phi$, assim como \vec{v} , nos dá uma direção ao longo da qual avaliamos a variação do funcional F . Como $\delta\phi$ descreve a variação de ϕ em cada ponto do espaço, temos uma integral em x fazendo o papel do somatório em i . Por fim, a derivada funcional de F tem papel análogo à derivada parcial de f , e contém informação de como F varia ao longo das infinitas direções de Γ .

A derivada funcional contém todas as propriedades características de diferenciação, ou seja, é linear e obedece às regras de Leibniz e da cadeia.

Com a derivada funcional, é possível adaptar o princípio da ação mínima para o contexto de campos clássicos. A ação é definida como um funcional sobre o espaço de campos da forma

$$S[\phi] = \int dt L[\phi], \quad (2.26)$$

sendo $L[\phi]$ a Lagrangiana, que por sua vez pode ser escrita como

$$L[\phi] = \int d^3x \mathcal{L}(x), \quad (2.27)$$

onde \mathcal{L} é conhecida como **densidade Lagrangiana**. Impondo sobre a densidade Lagrangiana as condições de localidade e causalidade, temos que

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi, \nabla_a \phi, g_{ab}), \quad (2.28)$$

onde $\nabla_a \phi$ é a derivada covariante de ϕ e g_{ab} é a métrica do espaço-tempo. Em outras palavras, a densidade Lagrangiana depende de x através do campo e de sua derivada covariante, bem como da métrica do espaço-tempo.

O princípio da ação mínima, assim como no caso de sistemas de partículas, seleciona o campo que mantém a ação estacionária, ou seja,

$$\delta S[\phi] = 0 \quad (2.29)$$

dada uma variação arbitrária $\delta\phi$ do campo (desde que $\delta\phi(x_i) = \delta\phi(x_f) = 0$).

Usando (2.24), o princípio da ação mínima implica na equação de Euler-Lagrange para campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0. \quad (2.30)$$

A equação (2.30) pode ser extrapolada para campos tensoriais de diferentes tipos, resultando em uma equação da mesma forma para cada uma das componentes do tensor.

O momento conjugado ao campo é definido de forma semelhante ao caso de partículas:

$$\pi(t, \vec{x}) = \frac{\delta L(t)}{\delta \dot{\phi}(t, \vec{x})}.$$

A definição acima pode ser reescrita em termos da densidade Lagrangiana usando novamente (2.24), resultando em

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (2.31)$$

Da definição do momento canônico, surgem novamente vínculos primários

$$C_k(\phi, \pi) = 0. \quad (2.32)$$

Além disso, a partir das equações de Euler-Lagrange e de (2.31), segue que

$$\dot{\pi}(t, \vec{x}) = \frac{\delta L(t)}{\delta \phi(t, \vec{x})}. \quad (2.33)$$

A Hamiltonina, como já vimos, é resultado de uma transformação de Legendre sobre a Lagrangiana:

$$H(t) = \int d^3x [\pi(t, \vec{x}) \dot{\phi}(t, \vec{x})] - L(t). \quad (2.34)$$

Da mesma forma como fizemos em (2.28), introduzimos o conceito de **densidade Hamiltoniana** \mathcal{H} através da expressão

$$\begin{aligned} H(t) &= \int d^3x \mathcal{H}(t, \vec{x}), \\ \mathcal{H} &= \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

O procedimento envolvendo a Hamiltoniana é bastante similar ao realizado na seção anterior. Calculando a variação de H e usando (2.33), temos

$$\begin{aligned} \delta H(t) &= \int d^3x \{ [\delta \dot{\phi}(t, \vec{x})] \pi(t, \vec{x}) + [\delta \pi(t, \vec{x})] \dot{\phi}(t, \vec{x}) \} - \delta L(t) \\ &\Rightarrow \left(\frac{\delta H}{\delta \phi} + \dot{\pi} \right) \delta \phi + \left(\frac{\delta H}{\delta \pi} - \dot{\phi} \right) \delta \pi = 0, \end{aligned}$$

que, a partir de uma versão adaptada para campos do teorema (2), implica que

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \pi} - \dot{\phi} &= f^k \frac{\delta C_k}{\delta \pi}, \\ \frac{\delta H}{\delta \phi} + \dot{\pi} &= f^k \frac{\delta C_k}{\delta \phi}. \end{aligned}$$

Usando a regra de Leibniz, é possível reescrever as equações acima como

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &\approx \frac{\delta(H - f^k C_k)}{\delta \pi}, \\ -\dot{\pi} &\approx \frac{\delta(H - f^k C_k)}{\delta \phi}. \end{aligned}$$

Definindo $H_{total} := H - f^k C_k$, chegamos na forma final das equações de movimento do formalismo Hamiltoniano para campos clássicos:

$$\dot{\phi} \approx \frac{\delta H_{total}}{\delta \pi}, \quad (2.36)$$

$$\dot{\pi} \approx -\frac{\delta H_{total}}{\delta \phi}. \quad (2.37)$$

Por fim, adaptamos a definição de colchetes de Poisson para campos. Dados dois funcionais F e G sobre o espaço de fase, o colchete de Poisson entre eles é da forma

$$\{F, G\} := \int d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta \phi(t, \vec{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi(t, \vec{x})} - \frac{\delta F}{\delta \pi(t, \vec{x})} \frac{\delta G}{\delta \phi(t, \vec{x})} \right]. \quad (2.38)$$

Com isso, podemos reescrever as equações de movimento (2.36) e (2.37) usando colchetes de Poisson

$$\dot{\phi} \approx \{ \phi, H_{total} \}, \quad (2.39)$$

$$\dot{\pi} \approx \{ \pi, H_{total} \}, \quad (2.40)$$

ou, de forma geral, para um funcional F sobre o espaço de fase

$$\dot{F} \approx \{\phi, H_{total}\}. \quad (2.41)$$

Além disso, podemos usar os colchetes de Poisson para estabelecer a seguinte relação entre um par canônico

$$\{\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')\} = \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.42)$$

onde $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ representa a distribuição delta de Dirac. As demais etapas da análise, como condições de consistência e vínculos secundários, seguem de forma completamente análoga ao que foi visto na seção anterior.

3 Formalismo ADM

Agora voltaremos nossa atenção à aplicação das ideias vistas no capítulo anterior no contexto da relatividade geral. Tomaremos como base a discussão feita em [12] sobre o assunto. Começamos pela **equação de Einstein** na sua forma tensorial:

$$G_{ab} = \kappa T_{ab}, \quad (3.1)$$

onde $\kappa = 8\pi G$ (G é a constante gravitacional de Newton), T_{ab} é o **tensor energia-momento** e $G_{ab} = R_{ab} - 1/2g_{ab}R$ é o **tensor de Einstein**, sendo R_{ab} o **tensor de Ricci**, g_{ab} a **métrica** do espaço-tempo e R o **escalar de Ricci**. Lembrando que o **tensor de curvatura de Riemann** pode ser definido através da sua atuação sobre uma 1-forma ω_a como

$$R_{abc}{}^d \omega_d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c, \quad (3.2)$$

onde ∇_a é a derivada covariante compatível com a métrica (ou seja, $\nabla_a g_{bc} = 0$), e que o tensor de Ricci é dado pela contração de índices alternados do tensor de curvatura de Riemann, $R_{ab} = R_{acb}{}^c$.

Nota-se pela forma de (3.1) que a equação de Einstein relaciona a geometria do espaço-tempo, descrita por G_{ab} , com o conteúdo de matéria, descrito por T_{ab} , e κ faz o papel de fator de conversão de unidades de densidade de energia para unidades de curvatura.

Uma das propriedades do tensor de curvatura de Riemann é a chamada **identidade de Bianchi**:

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0, \quad (3.3)$$

onde os colchetes nos índices representam antissimetrização. Essa propriedade é herdada pelo tensor de Einstein na forma [14]

$$\nabla_a G^{ab} = 0. \quad (3.4)$$

Escrevendo a identidade em termos das derivadas parciais e símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$, a expressão fica da seguinte forma:

$$\partial_0 G_\mu^0 = -\partial_i G_\mu^i - \Gamma_{\nu\sigma}^\nu G_\mu^\sigma + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma G_\sigma^\nu, \quad (3.5)$$

em que simplesmente separamos a derivada parcial de G_ν^μ com relação ao tempo, $\partial_0 G_\mu^0$, dos termos com derivadas espaciais, $\partial_i G_\mu^i$.

Pela definição de G_ν^μ e dos símbolos de Christoffel, é possível inferir que os termos do lado direito contém no máximo derivadas de segunda ordem no tempo. Isso acontece

porque G_{ν}^{μ} contém no máximo derivadas de segunda ordem, enquanto os símbolos de Christoffel, dados pela expressão

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_{\nu}g_{\rho\sigma} + \partial_{\sigma}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\nu\sigma})$$

contém apenas derivadas de primeira ordem. Como o termo contendo derivadas do tensor de Einstein é $\partial_i G_{\mu}^i$, ou seja, trata-se de derivadas espaciais do tensor de Einstein, a expressão do lado direito contém no máximo derivadas de segunda ordem no tempo. Então, de (3.5), podemos concluir que G_{μ}^0 contém no máximo derivadas de primeira ordem no tempo, pois o único termo no lado esquerdo é $\partial_0 G_{\mu}^0$ e caso houvesse derivadas de segunda ordem (ou de ordem maior) com relação ao tempo em G_{μ}^0 , a identidade de Bianchi não seria satisfeita.

Analisando a equação de Einstein (3.1) do ponto de vista dos componentes, vemos que se trata de um sistema de 10 equações diferenciais parciais, já que tanto o tensor de Einstein quanto o tensor de energia-momento são simétricos e quadridimensionais. Pelo que concluímos acima, as equações envolvendo as componentes $G_{0\mu}$ são equações de primeira ordem no tempo, enquanto as equações com as componentes G_{ij} são de segunda ordem. Sendo assim, as equações envolvendo G_{ij} correspondem às equações de evolução do sistema, enquanto as equações envolvendo $G_{0\mu}$, por serem de menor ordem, atuam como vínculos sobre as equações de evolução, ou seja, impõem restrições sobre a evolução do sistema.

Esse é o cerne do formalismo ADM: das 10 equações de Einstein, 6 são equações de evolução enquanto 4 são vínculos. Isso nos permite escrever as equações de Einstein na forma de um sistema Hamiltoniano vinculado, onde podemos aplicar não apenas todas as ferramentas que foram descritas no capítulo 2, mas também todo ferramental disponibilizado pelo formalismo Hamiltoniano, como por exemplo transformações canônicas. Para que possamos separar de forma clara as grandezas físicas e das variáveis com liberdade de calibre, faremos uso da técnica de folheação do espaço-tempo. Isso nos permitirá reescrever os termos de curvatura de forma a tornar essa separação evidente. Com isso, podemos reescrever a ação de Einstein-Hilbert usando essas variáveis e, a partir daí, apenas aplicamos o método desenvolvido no capítulo anterior partindo da ação de Einstein-Hilbert, obtendo assim as equações de Einstein na forma de um sistema Hamiltoniano vinculado.

3.1 Folheação (1+3)

Seja M um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Então M admite uma **folheação (1+3)** para um determinado Σ através de uma família de embutimentos $e_t : \Sigma \rightarrow M$, parametrizada por $t \in \mathbb{R}$, de forma que $M \approx \mathbb{R} \times \Sigma$ (nesse contexto, " \approx " significa "topologicamente equivalente"), como mostrado na Figura 1. O objetivo desse método é descrever o espaço-tempo M como a história do espaço Σ ao longo do tempo t . O espaço em um dado instante t é descrito através do mergulho de Σ em M por meio de e_t , ou seja,

$e_t(\Sigma) =: \Sigma_t \subset M$, chamada de **folha**, representa a situação do espaço nesse instante de tempo. A folheação tem duas características principais: (1) $\Sigma_{t_1} \cap \Sigma_{t_2} = \emptyset$ para $t_1 \neq t_2$ e; (2) $\bigcup_t \Sigma_t = M$. Isso significa que cada ponto do espaço-tempo faz parte de uma única folha. Qualquer família de embutimentos que satisfaça essas condições pode ser usada como folheação, o que significa dizer que a folheação do espaço-tempo não é unívoca¹.

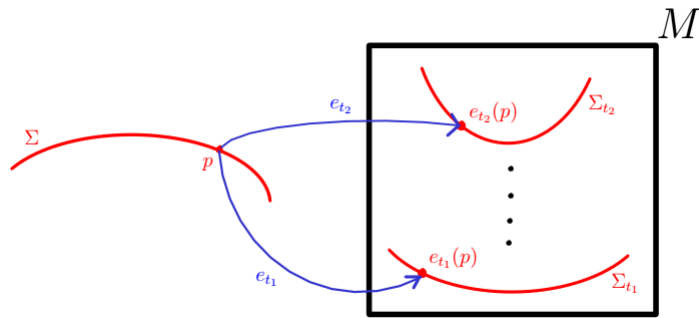


Figura 1 – Representação esquemática da folheação do espaço-tempo.

Como as folhas são espaciais, tridimensionais e estão contidas no espaço-tempo quadridimensional, é possível assinalar a cada ponto de uma folha Σ_t um vetor tipo tempo ortogonal a ela. Isso nos permite definir, para uma dada folheação (ou seja, uma escolha de uma família de embutimentos $\{e_t\}$ e superfície espacial Σ), um **campo vetorial normal** n^a tipo tempo, tal que $g_{ab}n^an^b = -1$.

Sendo assim, a folheação induz a decomposição dos vetores em uma componente paralela e uma ortogonal à folha Σ_t onde esse vetor se encontra, o que pode ser feito através operadores de projeção [15] paralela

$$\begin{aligned} P_{\parallel} : TM &\rightarrow TM \\ X^a &\mapsto X^a + n^an_bX^b, \end{aligned} \tag{3.6}$$

e ortogonal

$$\begin{aligned} P_{\perp} : TM &\rightarrow TM \\ X^a &\mapsto -n^an_bX^b. \end{aligned} \tag{3.7}$$

A partir desses operadores, podemos definir os subconjuntos $T_{\parallel}M := P_{\parallel}(TM)$ e $T_{\perp}M := P_{\perp}(TM)$. É fácil perceber pela definição dos projetores que, para qualquer vetor X^a , temos que $X^a = (P_{\parallel}X)^a + (P_{\perp}X)^a$, mostrando que a decomposição é bem definida.

¹ Vale ressaltar que nem todas as soluções possíveis para a equação de Einstein admitem um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Trata-se de uma restrição sobre as possíveis soluções.

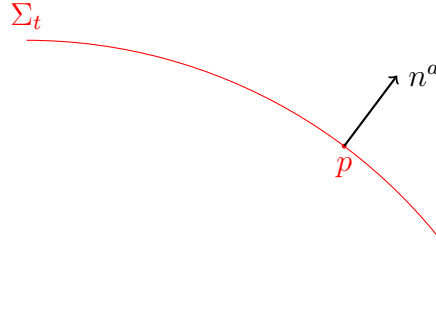


Figura 2 – Campo vetorial normal n^a .

Essas projeções podem ser estendidas para o dual $T^*(M)$ bem como para os demais espaços de tensores definidos em M . Então, para uma 1-forma ω_a , temos que $(P_{\parallel}\omega)_a = \omega_a + n_a n^b \omega_b$. De maneira geral, para um tensor T do tipo (l, m) , a atuação do projetor paralelo pode ser definida como

$$(P_{\parallel}T)(v^1, \dots, v^m, \omega_1, \dots, \omega_l) := T(P_{\parallel}v^1, \dots, P_{\parallel}v^m, P_{\parallel}\omega_1, \dots, P_{\parallel}\omega_l), \quad (3.8)$$

onde v^k são vetores tangentes a M e ω_k são 1-formas cotangentes a M . Ou seja, o projetor atuando sobre um tensor é o mesmo que o tensor atuando sobre as projeções de suas entradas. O caso do projetor ortogonal é totalmente análogo.

O caso da projeção da métrica é particularmente interessante. Dados dois vetores X^a e Y^a , temos

$$\begin{aligned} (P_{\parallel}g)(X, Y) &= g(P_{\parallel}X, P_{\parallel}Y) \\ &= g_{ab}(X^a + n^a n_c X^c)(Y^b + n^b n_d Y^d) \\ &= g_{ab}X^a Y^b + g_{ab}X^a n^b n_d Y^d + g_{ab}Y^b n^a n_c X^c + g_{ab}n^a n_c X^c n^b n_d Y^d \\ &= g_{ab}X^a Y^b + n_b X^b n_d Y^d + n_b Y^b n_c X^c - n_c X^c n_d Y^d \\ &= g_{ab}X^a Y^b + n_a n_b X^a Y^b \\ &= (g_{ab} + n_a n_b)X^a Y^b, \end{aligned}$$

ou seja

$$q_{ab} := (P_{\parallel}g)_{ab} = g_{ab} + n_a n_b, \quad (3.9)$$

É interessante notar que

$$\begin{aligned} q_{ab}n^a &= (g_{ab} + n_a n_b)n^a \\ &= g_{ab}n^a - n_b \\ &= 0, \end{aligned}$$

e, para $X^a \in T_{\parallel}M$

$$\begin{aligned} q_{ab}X^a &= (g_{ab} + n_a n_b)X^a \\ &= g_{ab}X^a, \end{aligned}$$

já que n^a e X^a são ortogonais. Ou seja, a projeção da métrica se anula quando contraída com vetores ortogonais e atua como a métrica do espaço-tempo quando contraída com vetores tangentes. Por isso, quando restrita a uma folha Σ_t , q_{ab} pode ser usada como uma métrica sobre essa folha. Por conta disso, q_{ab} recebe o nome de **métrica induzida**.

A partir da métrica induzida, podemos descrever as projeções como:

$$(P_{\parallel}T)^{a_1\dots a_l}_{b_1\dots b_m} = q^{a_1}_{c_1}\dots q^{a_l}_{c_l}q^{d_1}_{b_1}\dots q^{d_m}_{b_m}T^{c_1\dots c_l}_{d_1\dots d_m}, \quad (3.10)$$

onde $q^a_b = \delta^a_b + n^a n_b$.

Assim como é o caso da métrica g_{ab} , definimos $q^{ab} = g^{ab} + n^a n^b$ como a "inversa da métrica induzida". No entanto, vale notar que

$$q_{ac}q^{cb} = \delta_a^b + n_a n^b. \quad (3.11)$$

o que significa que q^{ab} não é realmente a inversa da métrica q_{ab} . Ainda assim, se restringirmos a atuação desses tensores somente a vetores espaciais, o segundo termo a direita da igualdade se anula e podemos usar q_{ab} e q^{ab} da mesma forma como usamos g_{ab} e g^{ab} para subir e baixar índices [12]. Tomando esse cuidado, é possível estender o que foi discutido até agora nessa seção para campos vetoriais, duais e os demais campos tensoriais. Assim, sendo $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de M , podemos definir $\mathcal{X}(M)_{\parallel}$ e $\mathcal{X}(M)_{\perp}$ da mesma maneira como fizemos para $T_{\parallel}M$ e $T_{\perp}M$.

A folheação também induz uma separação na derivada covariante. Seja X^a um campo vetorial em $\mathcal{X}(M)_{\parallel}$ (chamemos de "campo vetorial paralelo", por conveniência). Quando esse campo vetorial é submetido à ação da derivada covariante, é possível que ele deixe de ser um campo paralelo, de forma que podemos decompor o campo resultante em componentes paralela e perpendicular

$$\begin{aligned} \nabla_a X^b &= P_{\parallel}(\nabla_a X^b) + P_{\perp}(\nabla_a X^b) \\ &=: D_a X^b + n^b K_{ac} X^c, \end{aligned} \quad (3.12)$$

sendo D_a a derivada covariante compatível com a métrica q_{ab} e K_{ab} um tensor puramente espacial conhecido como **curvatura extrínseca** (de Σ_t em M). Precisamos mostrar que $D_a := P_{\parallel}\nabla_a$ é de fato a derivada covariante compatível com q_{ab} , mostrando que ela satisfaz todas as propriedades necessárias para ser um derivada covariante de torsão nula bem como a condição de compatibilidade. Propriedades como linearidade, regras de Leibniz e comutação com contração são herdadas de ∇_a diretamente por D_a pela definição e podem ser provadas facilmente. Mostremos então que a condições de compatibilidade com

a métrica e torsão nula são satisfeitas. Para a condição de compatibilidade, temos

$$\begin{aligned}
D_a q_{bc} &= P_{\parallel} [\nabla_a (g_{bc} + n_b n_c)] \\
&= P_{\parallel} [\nabla_a (n_b n_c)] \\
&= P_{\parallel} [(\nabla_a n_b) n_c + (\nabla_a n_c) n_b] \\
&= [P_{\parallel} (\nabla_a n_b)] P_{\parallel} (n_c) + [P_{\parallel} (\nabla_a n_c)] P_{\parallel} (n_b) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como esperado. Na primeira igualdade, apenas usamos as definições de D_a e q_{bc} . Na seguinte, usamos a condição de compatibilidade $\nabla_a g_{bc} = 0$. Usamos então (3.10) na passagem seguinte e por fim, usamos o fato de que $P_{\parallel} n_a = 0$. Para a condição de torsão nula, temos, para uma função f qualquer definida em Σ_t

$$\begin{aligned}
D_a D_b f &= P_{\parallel} \nabla_a (P_{\parallel} \nabla_b f) \\
&= P_{\parallel} \nabla_a (\nabla_b f + n_b n^c \nabla_c f) \\
&= P_{\parallel} [\nabla_a \nabla_b f + (\nabla_a n_b) n^c \nabla_c f + n_b (\nabla_a n^c) \nabla_c f + n_b n^c (\nabla_a \nabla_c f)] \\
&= P_{\parallel} \nabla_a \nabla_b f \\
&= P_{\parallel} \nabla_b \nabla_a f \\
&= D_b D_a f,
\end{aligned}$$

onde usamos a torsão nula de ∇_a , $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$, e mais uma vez a ortogonalidade de n^a , o que faz com que P_{\parallel} anule os três últimos termos da terceira linha. Sendo assim, quando restringimos a atuação de D_a a uma folha Σ_t , trata-se exatamente da derivada covariante de torsão nula de Σ_t compatível com a métrica $q_{ab}(t)$. No entanto, da forma como definimos D_a , podemos estender sua aplicação mesmo para vetores que não sejam tangentes às folhas. Isso porque tanto o operador de projeção P_{\parallel} quanto a derivada covariante ∇_a estão definidos em M .

A curvatura extrínseca K_{ab} , por sua vez, está diretamente relacionada à forma com que a superfície espacial Σ está embutida no espaço-tempo em um determinado instante t . Isso pode ser visto observando como o vetor normal n^a varia ao longo da superfície Σ_t . Essa correspondência pode ser obtida a partir da definição de curvatura extrínseca em (3.12)

$$P_{\perp} (\nabla_a X^b) = n^b K_{ac} X^c, \quad (3.13)$$

e da identidade

$$\nabla_a (X^b n_b) = 0 \Rightarrow (\nabla_a X^b) n_b = -(\nabla_a n_b) X^b,$$

já que X^a e n^a são ortogonais para X^a espacial.

Começamos pela decomposição

$$\begin{aligned}
(\nabla_a X^b) n_b &= -(\nabla_a n_b) X^b \\
[P_{\parallel} (\nabla_a X^b) + P_{\perp} (\nabla_a X^b)] n_b &= -(\nabla_a n_b) X^b.
\end{aligned}$$

Como o resultado de $P_{\parallel}(\nabla_a X^b)$ é espacial, $P_{\parallel}(\nabla_a X^b)n_b = 0$. Então a expressão acima pode ser reduzida para

$$\begin{aligned} P_{\perp}(\nabla_a X^b)n_b &= -(\nabla_a n_b)X^b \\ n^b K_{ac}X^c n_b &= -(\nabla_a n_b)X^b \\ K_{ab}X^b &= (\nabla_a n_b)X^b, \end{aligned}$$

onde usamos a definição (3.13) na primeira passagem e $n^b n_b = -1$ na segunda. Como X^b é espacial, $(\nabla_a n_b)X^b = P_{\parallel}(\nabla_a n_b)X^b$ e, usando novamente (3.12), concluímos que

$$K_{ab} = P_{\parallel}(\nabla_a n_b) = D_a n_b, \quad (3.14)$$

ou seja, K_{ab} mostra o quanto o vetor normal n^a é deslocado espacialmente quando transportado ao longo de uma curva em Σ_t . Mais explicitamente, dado um campo vetorial $X^a \in \mathcal{X}(\Sigma_t)$, $X^a K_{ab} = X^a D_a n_b$ diz o quanto n^a varia espacialmente quando transportado ao longo da curva integral de X^a .

3.2 Derivada Temporal

A métrica induzida q_{ab} é a grandeza central da análise canônica da gravidade. Contudo, é preciso cautela, pois apesar de ser um campo tensorial simétrico em M , q_{ab} não é uma métrica em M . A forma apropriada de interpretar q_{ab} seria como uma família de métricas espaciais parametrizada por t , cada uma delas sobre uma folha Σ_t diferente. Isso torna mais plausível a ideia de evolução temporal da métrica induzida. No entanto, antes de seguir para esse tipo de análise, é necessário definir de forma rigorosa o que seria a derivada temporal de um campo, pois estamos lidando com o espaço-tempo e as noções de evolução temporal e variação com o tempo são menos palpáveis do que costumam ser em mecânica clássica. Por isso, precisamos entender qual o papel do parâmetro t na evolução dos campos e por que esse parâmetro está associado à ideia de tempo.

Sejam $p \in \Sigma$ e uma folheação descrita por $\{e_t\}$. Sabemos que $e_t(p) \in \Sigma_t \subset M$. Definimos então o **campo temporal** t^a como o campo vetorial em M cujas curvas integrais são dadas por $\bigcup_t e_t(p)$. Dessa forma, cada curva integral de t^a corresponde a uma linha de mundo descrita por p através dos embutimentos e_t . Como trata-se de uma família de embutimentos, cada e_t é injetivo em M , e por tratar-se de uma folheação, as superfícies espaciais não têm pontos em comum, e assim o campo temporal é bem definido. Com isso, é possível estabelecer uma noção precisa do que significa “variar com o tempo”: é o mesmo

² É importante notar que só é possível escrever a curvatura extrínseca em termos de D_a pelo fato de termos estendido sua atuação para todo o espaço-tempo M . Afinal, caso a definição de D_a fosse restrita somente a derivada covariante em Σ_t , como n^a não faz parte do fibrado tangente dessa variedade, a definição descrita em (3.14) não faria sentido.

que variar ao longo das linhas integrais de t^a . Ou seja, uma curva integral γ_p de t^a é tal que $\gamma_p(t) = e_t(p)$.

É possível introduzir um sistema de coordenadas em M de forma que o campo temporal t^a seja a derivada parcial em relação ao tempo. A partir de uma carta local em Σ , p adquire certas coordenadas espaciais (x^1, x^2, x^3) . Essa escolha de carta local em Σ induz uma carta local em M de forma que o ponto $q = e_t(p)$ adquire coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) . Usando o sistema de coordenadas definido acima, como p é sempre o mesmo ao longo de uma dada curva γ_p , as coordenadas espaciais ao longo dessa curva são constantes. Além disso, a curva é parametrizada pelo tempo t , e assim o campo temporal tem coordenadas $(1, 0, 0, 0)$ para essa escolha de sistema de coordenadas. Com isso, para uma função f qualquer em M , temos que

$$t^a(f) = t^\mu \nabla_\mu f = \partial_t f, \quad (3.15)$$

ou seja, para essa escolha, t^a torna-se o campo vetorial que define a direção da derivada temporal.

Como todo campo vetorial em M , t^a pode ser decomposto em componentes paralela e perpendicular usando os projetores:

$$t^a = P_\perp(t^a) + P_\parallel(t^a) =: Nn^a + N^a, \quad (3.16)$$

sendo N conhecida como **função lapso** e N^a como **vetor de *shift***. Pela forma do campo temporal, podemos interpretar a função lapso como uma forma de medir o número de folhas atravessadas transversalmente num dado intervalo de tempo δt , enquanto o vetor de *shift* está relacionado com o deslocamento espacial entre o embutimento do ponto p em Σ_t e o embutimento do mesmo ponto em $\Sigma_{t+\delta t}$, como mostra a figura.

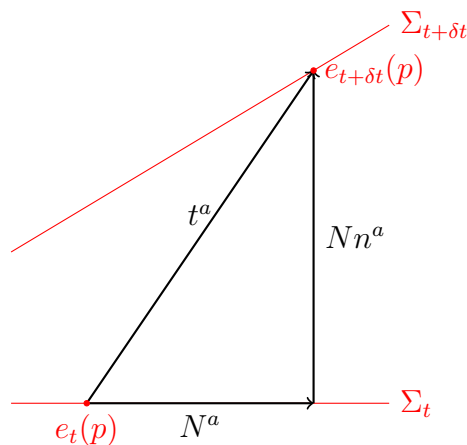


Figura 3 – Campo temporal t^a .

Essas noções permitem que interpretemos os campos temporal t^a e normal n^a como campos cujas curvas integrais correspondem a linhas de mundo de diferentes famílias de observadores. Por exemplo, para $t^a = n^a$, $N^a = 0$, o que corresponderia a um observador estacionário com relação a superfície espacial. O campo temporal é definido a partir dos embutimentos e_t , que podem ser escolhidos arbitrariamente desde que satisfaçam as condições de folheação. Em outras palavras, a liberdade de escolha desses embutimentos corresponde à liberdade de escolha de um referencial. Esse paralelo é reforçado pelo fato de que os campos temporal e normal são tipo tempo. Isso mostra que N e N^a são diretamente dependentes da escolha de referencial, e correspondem a variáveis associadas a uma liberdade de calibre do sistema, como veremos mais adiante.

Essa ideia fica ainda mais clara quando normalizamos o campo temporal. A norma de t^a é dada por

$$\begin{aligned} t^a t_a &= N^2 n^a n_a + 2N n^a N_a + N^a N_a \\ &= -N^2 + \|\vec{N}\|^2, \end{aligned}$$

já que $n^a N_a = 0$. Assim, o campo temporal normalizado é da forma

$$\frac{t^a}{\sqrt{-t^a t_a}} = \frac{n^a + N^a/N}{\sqrt{1 - \|\vec{N}/N\|^2}}.$$

A partir do que foi discutido sobre o lapso e o *shift*, percebe-se que $\vec{V} := \vec{N}/N$ é, na verdade, a velocidade relativa entre os observadores em t^a e n^a . Assim, $\gamma_{\vec{V}} = 1/\sqrt{1 - \|\vec{V}\|^2}$ é o fator de Lorentz correspondente a esse movimento relativo e o campo temporal pode ser escrito como $(\gamma_{\vec{V}}, \gamma_{\vec{V}} \vec{V})$ no referencial de repouso do observador que segue a curva de n^a , que é a fórmula da quadrivelocidade de um objeto com velocidade \vec{V} em relação a esse referencial. Como esperado, para o caso em que $t^a = n^a$, ou seja, $N^a = 0$, temos $\gamma_{\vec{0}} = 1$ e o campo temporal normalizado se torna $(1, \vec{0})$, que é a quadrivelocidade de um objeto em repouso com relação ao referencial.

Por fim, podemos definir a derivada temporal de um campo tensorial espacial parametrizado por t como sua derivada de Lie com relação a t^a . Isso porque a derivada de Lie é uma forma de avaliar as variações de campos tensoriais ao longo das curvas integrais de um campo, tornando possível comparar tensores em pontos diferentes dessa curva. Como o objetivo é avaliar a mudança de campos tensoriais com o tempo, a derivada de Lie ao longo de t^a cumpre perfeitamente esse papel. Assim, dado um campo tensorial espacial $T^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}$, definimos sua derivada temporal como

$$\dot{T}^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m} := P_{\parallel}(\mathcal{L}_t T^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}), \quad (3.17)$$

onde usamos o projetor para garantir que a derivada temporal seja também um campo tensorial espacial.

3.3 Decomposição da métrica

A partir dos conceitos introduzidos pela folheação do espaço-tempo, podemos expressar a métrica do espaço-tempo em termos dessas novas variáveis. A partir das definições de q^{ab} e t^a , temos

$$g^{ab} = q^{ab} - n^a n^b = q^{ab} - \frac{1}{N^2}(t^a - N^a)(t^b - N^b), \quad (3.18)$$

Escrevendo g^{ab} como uma matriz, obtemos

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^i}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & \left(q^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Invertendo essa matriz, obtemos a métrica na forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} (-N^2 + N^i N_i) & N_i \\ N_i & q_{ij} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

de onde tiramos diretamente o elemento de linha

$$ds^2 = -(N^2 - N^i N_i)dt^2 + N_a(dt dx^a + dx^a dt) + q_{ab}dx^a dx^b, \quad (3.21)$$

Com isso, conseguimos decompor a métrica em 4 termos independentes com variáveis livres, N e N^a , e 6 termos independentes com grandezas físicas, q_{ab} .

A ideia é expressar quaisquer relações em termos da métrica induzida, do lapso e do *shift*. Em particular, temos o caso do determinante da métrica, que aparece explicitamente na ação de Einstein-Hilbert. Para expressá-lo em função de q_{ab} , N e N^a , basta notar que $g^{00} = -1/N^2$ a partir da equação (3.18). Com isso, podemos usar a fórmula geral de matrizes inversas. Dada uma matriz A , temos que

$$(A^{-1})^{ij} = \frac{C_{ij}}{\det A},$$

onde $(A^{-1})^{ij}$ é o elemento da linha i e coluna j da matriz inversa de A e C_{ij} é o cofator correspondente, ou seja, o determinante da matriz menor, eliminando a i -ésima linha e a j -ésima coluna de A . No caso da métrica, é evidente que $C_{00} = \det(q_{ab})$, já que as linhas e colunas eliminadas são as que contém a parte temporal. Então, pela fórmula da inversa, obtemos

$$\begin{aligned} g^{00} &= -\frac{1}{N^2} = \frac{C_{00}}{\det(g_{ab})} \\ &= \frac{\det(q_{cd})}{\det(g_{ab})}, \end{aligned}$$

de onde conclui-se que

$$\det(g_{ab}) = -N^2 \det(q_{cd}). \quad (3.22)$$

3.4 Relações de Curvatura

A partir da folheação do espaço-tempo, a descrição da geometria da folha pode ser dividida em intrínseca e extrínseca. O termo que caracteriza a curvatura extrínseca, dado pela expressão (3.14), já foi discutido na seção 3.1. Para a curvatura intrínseca usamos o tensor de curvatura de Riemann, (3.2), tomando como variedade Σ e sua respectiva derivada covariante D_a compatível com a métrica q_{ab} , de forma que a curvatura intrínseca é dada por

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d\omega_d = (D_a D_b - D_b D_a)\omega_c \quad (3.23)$$

dada uma 1-forma $\omega_a \in T^*\Sigma$. A partir desse tensor, é possível calcular o tensor de Ricci, o escalar de Ricci e o tensor de Einstein correspondentes, como vimos no início deste capítulo.

Como Σ é espacial, não é possível analisar a evolução do sistema usando apenas parâmetros intrínsecos a essa variedade. De fato, o papel da curvatura extrínseca está intimamente relacionado com a evolução da métrica induzida. Tomando a derivada de Lie de q_{ab} ao longo do campo n^a , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n q_{ab} &= n^c \nabla_c q_{ab} + q_{ac} \nabla_b n^c + q_{bc} \nabla_a n^c \\ &= n^c \nabla_c (g_{ab} + n_a n_b) + \nabla_b n_a + \nabla_a n_b \\ &= n^c \nabla_c (n_a n_b) + \nabla_b n_a + \nabla_a n_b \\ &= (g_a{}^c + n_a n^c) \nabla_c n_b + (g_b{}^c + n_b n^c) \nabla_c n_b = K_{ab} + K_{ba}, \end{aligned}$$

onde usamos a definição (3.14) para chegar no resultado.

É possível simplificar ainda mais a expressão anterior usando o fato de que K_{ab} é simétrico. Dados dois campos vetoriais espaciais $X^a, Y^a \in \mathcal{X}(M)_{\parallel}$, o comutador entre eles, $[X, Y]^a$, também é espacial. Isso implica que sua contração com n^a é nula, então

$$n_a [X, Y]^a = n_a (X^b \nabla_b Y^a - Y^b \nabla_b X^a) = 0.$$

No entanto, como os campos são espaciais, temos que $n_a X^a = n_a Y^a = 0$, ou seja, $\nabla_b (n_a X^a) = 0$ de forma que $n_a \nabla_b X^a = -X^a \nabla_b n_a$ e o mesmo vale para Y^a . Assim, podemos reescrever a relação acima como

$$-Y^a X^b \nabla_b n_a + X^a Y^b \nabla_b n_a = X^a Y^b (\nabla_a n_b - \nabla_b n_a) = 0,$$

e como os campos espaciais são arbitrários, o resultado é válido para quaisquer projeções espaciais de $\nabla_a n_b$, mostrando que K_{ab} é de fato simétrico, pois $K_{ab} - K_{ba} = P_{\parallel}(\nabla_a n_b - \nabla_b n_a) = 0$. Essa simetria, associada ao resultado anterior, nos permite concluir que

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{ab}, \quad (3.24)$$

o que começa a apontar para a correspondência entre a curvatura extrínseca e a variação temporal da métrica induzida. Como vimos na seção 3.2, é possível escolher um referencial tal que $t^a = n^a$, o que faria com que K_{ab} pudesse ser visto como metade da derivada temporal da métrica espacial usando (3.17). O próximo passo é generalizar essa relação, de forma a obter uma relação direta entre K_{ab} e a derivada temporal de q_{ab} . A partir de (3.24) e da definição do campo temporal (3.16), temos que

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{ab} \\ &= \frac{1}{2N} [N n^c \nabla_c q_{ab} + q_{ac} \nabla_b (N n^c) + q_{bc} \nabla_a (N n^c)] \\ &= \frac{1}{2N} \mathcal{L}_{(t-N)} q_{ab}, \end{aligned}$$

onde usamos $N n^a = t^a - N^a$ no último passo. Como K_{ab} é espacial, podemos reescrever a relação acima como

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2N} P_{\parallel} [\mathcal{L}_{(t-N)} q_{ab}] \\ &= \frac{1}{2N} P_{\parallel} (\mathcal{L}_t q_{ab} - \mathcal{L}_N q_{ab}), \end{aligned}$$

onde é possível reconhecer o primeiro termo como \dot{q}_{ab} usando (3.17). Já o segundo termo é simplesmente $D_a N_b + D_b N_a$ pois

$$\begin{aligned} P_{\parallel} (N^c \nabla_c q_{ab} + q_{ac} \nabla_b N^c + q_{bc} \nabla_a N^c) &= N^c P_{\parallel} \nabla_c q_{ab} + P_{\parallel} \nabla_a N_b + P_{\parallel} \nabla_b N_a \\ &= D_a N_b + D_b N_a, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de N^c ser espacial na primeira igualdade, de modo que $P_{\parallel} (N^c \nabla_c q_{ab}) = N^c P_{\parallel} (\nabla_c q_{ab})$ e $P_{\parallel} \nabla_c q_{ab} = D_c q_{ab} = 0$ na última. Portanto, a curvatura extrínseca está relacionada com a derivada temporal de acordo com a expressão

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a). \quad (3.25)$$

A relação (3.25) é fundamental para que possamos escrever as equações de Einstein através do formalismo canônico, pois ela fornece uma relação explícita entre a curvatura extrínseca e a derivada temporal da métrica induzida, o que já indica que o momento conjugado de q_{ab} está de alguma forma relacionado à K_{ab} .

Agora precisamos entender como as curvaturas intrínseca e extrínseca estão relacionadas com a curvatura do espaço-tempo. Começamos a partir da fórmula (3.23) do tensor de curvatura de Riemann de Σ , escrevendo as composições de derivadas explicitamente em termos dos projetores e da derivada covariante ∇_a , de maneira similar ao que foi feito no cálculo da torsão de D_a :

$$\begin{aligned} D_a D_b \omega_c &= P_{\parallel} \nabla_a (P_{\parallel} \nabla_b \omega_c) \\ &= q_a^f q_b^g q_c^h \nabla_f (q_g^d q_h^e \nabla_d \omega_e) \\ &= q_a^f q_b^d q_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + q_c^e (q_a^f q_b^g \nabla_f q_g^d) \nabla_d \omega_e + q_b^d (q_a^f q_c^h \nabla_f q_h^e) \nabla_d \omega_e, \end{aligned}$$

O primeiro termo na expressão acima pode ser reescrito como $P_{\parallel} \nabla_a \nabla_b \omega_c$, enquanto podemos reescrever $q_a^f q_b^g \nabla_f q_g^d = q_a^f q_b^g \nabla_f (n_g n^d) = n^d q_a^f q_b^g \nabla_f n_g = n^d P_{\parallel} \nabla_a n_b = n^d K_{ab}$ no segundo termo, de forma que

$$q_c^e (q_a^f q_b^g \nabla_f q_g^d) \nabla_d \omega_e = n^d K_{ab} \nabla_d \omega_c, \quad (3.26)$$

e analogamente, o terceiro termo pode ser expresso como

$$\begin{aligned} q_b^d (q_a^f q_c^h \nabla_f q_h^e) \nabla_d \omega_e &= q_b^d K_{ac} n^e \nabla_d \omega_e \\ &= -K_{ac} q_b^d \omega_e \nabla_d n^e \\ &= -K_{ac} \omega_e q_b^d q^{fe} \nabla_d n_f \\ &= -K_{ac} K_b^e \omega_e, \end{aligned}$$

onde usamos que, para ω_e espacial, $\omega_e n^e = 0$, logo $n^e \nabla_d \omega_e = -\omega_e \nabla_d n^e$. Logo, a partir de (3.23), temos que

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{abc}{}^d \omega_d &= D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c \\ &= P_{\parallel} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c - K_{ac} K_b^d \omega_d + K_{bc} K_a^d \omega_d \\ &= P_{\parallel} R_{abc}{}^d \omega_d - K_{ac} K_b^d \omega_d + K_{bc} K_a^d \omega_d, \end{aligned}$$

onde os termos da forma (3.26) se cancelam. Chegamos então na relação conhecida como **equação de Gauss**:

$$P_{\parallel} R_{abc}{}^d = {}^{(3)}R_{abc}{}^d + K_{ac} K_b^d - K_{bc} K_a^d \quad (3.27)$$

Outra relação importante é a chamada **equação de Codazzi**, que podemos obter da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_{\parallel} R_{abcd} n^d &= P_{\parallel} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) n_c \\ &= P_{\parallel} [\nabla_a (g_b^d \nabla_d n_c) - \nabla_b (g_a^d \nabla_d n_c)] \\ &= P_{\parallel} [\nabla_a (P_{\parallel} \nabla_b n_c) - \nabla_a (n_b n^d \nabla_d n_c) - \nabla_b (P_{\parallel} \nabla_a n_c) + \nabla_b (n_a n^d \nabla_d n_c)] \\ &= D_a K_{bc} - D_b K_{ac} - P_{\parallel} [(\nabla_a n_b - \nabla_b n_a) (n^d \nabla_d n_c)], \end{aligned}$$

pois $P_{\parallel} [\nabla_a (P_{\parallel} \nabla_b n_c)] = D_a K_{bc}$. Como $P_{\parallel} (\nabla_a n_b - \nabla_b n_a) = K_{ab} - K_{ba} = 0$, chegamos assim na forma final da equação de Codazzi:

$$P_{\parallel} R_{abcd} n^d = D_a K_{bc} - D_b K_{ac}. \quad (3.28)$$

A última relação necessária é a chamada **equação de Ricci**, cuja trabalhosa dedução está feita no Apêndice A:

$$R_{acbd} n^c n^d = -\mathcal{L}_n K_{ab} + K_{ac} K^c{}_b + D_{(a} A_{b)} + A_a A_b \quad (3.29)$$

Contraindo os índices do tensor de Riemann de forma a obter o tensor de Ricci, temos que

$$\begin{aligned} R_{acb}{}^c n^a n^b &= -n^a (\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n^c \\ &= (\nabla_a n^a) (\nabla_c n^c) - (\nabla_c n^a) (\nabla_a n^c) - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c), \end{aligned}$$

onde aplicamos a regra de Leibniz. O primeiro termo fica

$$\begin{aligned} (\nabla_a n^a) (\nabla_c n^c) &= g_a{}^d g^c{}_e (\nabla_d n^a) (\nabla_c n^e) \\ &= (q_a{}^d \nabla_d n^a) (q^c{}_e \nabla_c n^e) - q_a{}^d n^c n_e (\nabla_d n^a) (\nabla_c n^e) \\ &\quad - q^c{}_e n_a n^d (\nabla_d n^a) (\nabla_c n^e) + n_a n^d n_c n^e (\nabla_d n^a) (\nabla_c n^e) \\ &= K^a{}_a K^c{}_c = (K^a{}_a)^2, \end{aligned}$$

onde, na passagem contendo quatro termos, todos além do primeiro se anulam por $n_a \nabla_b n^a = 0$. De forma semelhante, o segundo termo fica

$$(\nabla_c n^a) (\nabla_a n^c) = K^a{}_c K^c{}_a.$$

Os dois últimos termos podem ser agrupados como

$$\begin{aligned} -\nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) &= -\nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_a (n^c \nabla_c n^a) \\ &= \nabla_a (-n^a \nabla_c n^c + n^c \nabla_c n^a) \\ &= \nabla_a v^a, \end{aligned}$$

sendo

$$v^a := -n^a \nabla_c n^c + n^c \nabla_c n^a. \quad (3.30)$$

Obtemos então a equação

$$R_{ab} n^a n^b = (K^a{}_a)^2 - K^a{}_b K^b{}_a + \nabla_a v^a. \quad (3.31)$$

Quaisquer outras possíveis contrações de $R_{abc}{}^d$ com n^a ou q_{ab} são nulas devido às simetrias do tensor de Riemann.

Com esses resultados, podemos finalmente escrever o escalar de curvatura em termos das variáveis associadas à folheação:

$$\begin{aligned} R &= R^a{}_a = g^{ab} R_{ab} \\ &= g^{ab} R_{acb}{}^c \\ &= g^{ab} g^{cd} R_{acbd} \\ &= (q^{ab} - n^a n^b) (q^{cd} - n^c n^d) R_{acbd} \\ &= q^{ab} q^{cd} R_{acbd} - q^{ab} n^c n^d R_{acbd} - q^{cd} n^a n^b R_{acbd} + n^a n^b n^c n^d R_{acbd} \\ &= q^{ab} q^{cd} P_{\parallel} R_{acbd} - 2n^a n^b R_{ab} \\ &= q^{ab} q^{cd} ({}^{(3)}R_{acbd} + K_{ab} K_{cd} - K_{ac} K_{bd}) - 2[(K^a{}_a)^2 - K^a{}_b K^b{}_a + \nabla_a v^a] \\ &= ({}^{(3)}R - (K^a{}_a)^2 + K^a{}_b K^b{}_a - 2\nabla_a v^a), \end{aligned}$$

onde igualdades como $q^{ab}q^{cd}R_{abcd} = q^{ab}q^{cd}P_{||}R_{abcd}$ e $q^{ab}n^cn^dR_{abcd} = n^an^bR_{ab}$ são verdadeiras pelo fato de surgirem contrações nulas de R_{abcd} com n^a e q_{ab} ao abrirmos esses termos.

Obtemos assim a expressão para o escalar de Ricci em função das curvaturas intrínseca e extrínseca:

$$R = {}^{(3)}R - (K^a{}_a)^2 + K^{ab}K_{ab} - 2\nabla_a v^a. \quad (3.32)$$

Essa é a relação necessária para obter as equações de Einstein na forma de um sistema Hamiltoniano vinculado.

3.5 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral

A partir das conclusões obtidas ao longo deste capítulo, é possível agora expressar a dinâmica do espaço-tempo a partir das noções introduzidas pelo método de folheação. A ação de Einstein-Hilbert é dada por

$$S = \int dt(L_G + L_M), \quad (3.33)$$

sendo

$$L_G = \frac{1}{2\kappa} \int d^3x \sqrt{-\det(g_{ab})} R \quad (3.34)$$

a Lagrangiana associada à geometria do espaço e L_M a Lagrangiana associada ao conteúdo de matéria, onde $\kappa = 8\pi G$. Por ora, manteremos o foco em L_G .

Usando as relações (3.22) e (3.32), a equação (3.34) pode ser reescrita como

$$L_G = \frac{1}{2\kappa} \int d^3x N \sqrt{\det(q_{ab})} [{}^{(3)}R - (K^a{}_a)^2 + K^{ab}K_{ab}], \quad (3.35)$$

onde o termo envolvendo $\nabla_a v^a$ foi desprezado por tratar-se de um termo de fronteira que não afeta as equações de campo locais [12].

Dada a Lagrangiana, todo aparato discutido no capítulo 2 pode ser aplicado. Para obter os momentos conjugados de N e N^a , usamos (2.31), de onde vínculos primários surgem de forma bastante direta:

$$p_N(x) = \frac{\delta L_G}{\delta \dot{N}(x)} = 0, \quad (3.36)$$

$$p_a(x) = \frac{\delta L_G}{\delta \dot{N}^a(x)} = 0. \quad (3.37)$$

O momento conjugado à métrica induzida q_{ab} é dado por:

$$\pi^{ab}(x) = \frac{\delta L_G}{\delta \dot{q}_{ab}(x)},$$

e usando a equação (3.25), podemos calcular $\pi^{ab}(x)$ da seguinte maneira:

$$\pi^{ab}(x) = \frac{1}{2N} \frac{\delta L_G}{\delta K_{ab}} = \frac{\sqrt{\det(q_{ab})}}{2\kappa} (K^{ab} - K^c{}_c q^{ab}). \quad (3.38)$$

Contraindo a relação acima com q_{ab} e usando $q := \det(q_{ab})$, temos

$$\begin{aligned} K^{ab} q_{ab} - K^c{}_c q^{ab} q_{ab} &= \frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \pi^{ab} q_{ab} \\ K^a{}_a - 3K^a{}_a &= \frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \pi^a{}_a \\ \Rightarrow K^a{}_a &= -\frac{\kappa}{\sqrt{q}} \pi^a{}_a. \end{aligned}$$

Com isso, podemos isolar K^{ab} na equação (3.38), obtendo

$$\begin{aligned} K^{ab} + \frac{\kappa}{\sqrt{q}} \pi^c{}_c q^{ab} &= \frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \pi^{ab} \\ K^{ab} &= \frac{\kappa}{\sqrt{q}} (2\pi^{ab} - \pi^c{}_c q^{ab}). \end{aligned}$$

Substituindo (3.25) nessa relação, conseguimos expressar \dot{q}_{ab} em termos do seu momento conjugado π^{ab} :

$$\dot{q}_{ab} = \frac{2N\kappa}{\sqrt{q}} (2\pi_{ab} - \pi^c{}_c q_{ab}) + D_{(a} N_{b)}. \quad (3.39)$$

Assim, podemos usar (2.34) juntamente com (3.35), (3.36), (3.37) e (3.39) para obter a Hamiltoniana gravitacional calculando

$$H_G = \int d^3x (\dot{q}_{ab} \pi^{ab} - L_G + \lambda p_N + \mu^a p_a),$$

ou seja,

$$H_G = \int d^3x \left[\frac{2N\kappa}{\sqrt{q}} \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) + 2\pi^{ab} D_a N_b - \frac{N\sqrt{q}^{(3)} R}{2\kappa} \right] + \int d^3x (\lambda p_N + \mu^a p_a), \quad (3.40)$$

onde usamos $\pi = \pi^c{}_c$ para deixar a notação mais enxuta e λ e μ^a são multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos primários.

Aplicando as condições de consistência para os vínculos primários (3.36) e (3.37), obtemos os vínculos secundários:

$$-\mathbb{S}_G := \dot{p}_N = \{p_N, H_G\} = -\frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) + \frac{N\sqrt{q}^{(3)} R}{2\kappa} = 0, \quad (3.41)$$

denominado **vínculo Hamiltoniano**, e

$$-\mathbb{V}_a^G := \dot{p}_a = \{p_a, H_G\} = 2\sqrt{q} q_{ab} D_c \left(\frac{\pi^{bc}}{\sqrt{q}} \right) = 0, \quad (3.42)$$

onde usamos integração por partes com $2 \int d^3x \sqrt{q} D_a(\pi^{ab} N_b / \sqrt{q})$ como termo de fronteira. Esse é o denominado **vínculo de difeomorfismo**. Neste texto, não entraremos em detalhes sobre os termos de fronteira, no entanto uma discussão aprofundada sobre o assunto pode ser encontrada em [12].

Comparando a forma dos vínculos secundários (3.41) e (3.41) com a expressão em (3.40), nota-se que a Hamiltoniana gravitacional é expressa como uma combinação linear desses vínculos:

$$H_G = \int d^3x (N \mathbb{S}_G + N^a \mathbb{V}_a^G + \lambda p_N + \mu^a p_a), \quad (3.43)$$

a menos de termos de fronteira.

Enfim, conseguimos uma representação da dinâmica da geometria do espaço-tempo na forma de uma Hamiltoniana. As variáveis canônicas que descrevem essa evolução são dadas por $q_{ab}(\vec{x})$ e $\pi^{ab}(\vec{x})$. Como todo par canônico, essas variáveis devem satisfazer as relações

$$\{q_{ab}(\vec{x}), \pi^{cd}(\vec{x}')\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.44)$$

para todo t . A simetrização dos deltas ocorre devido a simetria da métrica induzida, já que a mesma relação é válida quando invertemos os índices.

Nos resta agora analisar o termo da Lagrangiana correspondente a matéria, L_M . O conteúdo de matéria pode ser descrito de diferentes formas. Ao longo desse trabalho, iremos abordar a distribuição de matéria no espaço através de um campo escalar $\Phi(\vec{x})$. Assumindo acoplamento mínimo, a Lagrangiana de matéria é dada por

$$L_M = - \int d^3x N \sqrt{q} \left[\frac{1}{2} \nabla_a \Phi \nabla^a \Phi + V(\Phi) \right],$$

ou seja, o único acoplamento entre o campo escalar e a métrica se dá por meio do determinante da métrica.

Usando o procedimento padrão, obtém-se a Hamiltoniana de matéria

$$H_M = \int d^3x \left\{ N \left[\frac{1}{2\sqrt{q}} P_\Phi^2 + \frac{\sqrt{q}}{2} D_i \Phi D^i \Phi + \sqrt{q} V(\Phi) \right] + N^i P_\Phi D_i \Phi \right\}, \quad (3.45)$$

onde

$$P_\Phi(\vec{x}) = \frac{\delta L_M}{\delta \dot{\Phi}(\vec{x})} = \frac{\sqrt{q}}{N} \left[\dot{\Phi}(\vec{x}) - N^i D_i \Phi(\vec{x}) \right] \quad (3.46)$$

é o momento conjugado ao campo escalar.

Somando essa contribuição à (3.43), obtemos a Hamiltoniana total

$$H := H_G + H_M = \int d^3x (N \mathbb{S} + N^a \mathbb{V}_a + \lambda p_N + \mu^a p_a), \quad (3.47)$$

sendo

$$\mathbb{S} := \mathbb{S}_G + \frac{1}{2\sqrt{q}} P_\Phi^2 + \frac{\sqrt{q}}{2} D_a \Phi D^a \Phi + \sqrt{q} V(\Phi) \quad (3.48)$$

$$= \frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} {}^{(3)}R + \frac{1}{2\sqrt{q}} P_\Phi^2 + \frac{\sqrt{q}}{2} D_a \Phi D^a \Phi + \sqrt{q} V(\Phi) \approx 0 \quad (3.49)$$

o vínculo Hamiltoniano total, e

$$\mathbb{V}_a := \mathbb{V}_a^G + P_\Phi D_a \Phi = -2\sqrt{q}q_{ab}D_c \left(\frac{\pi^{bc}}{\sqrt{q}} \right) + P_\Phi D_a \Phi \approx 0 \quad (3.50)$$

o vínculo de difeomorfismo total.

Como par canônico, o campo escalar e seu momento conjugado devem satisfazer à relação

$$\{\Phi(\vec{x}), P_\Phi(\vec{x}')\} = \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (3.51)$$

Essa é a forma final da Hamiltoniana que captura a dinâmica descrita nas equações de Einstein (3.1). Trata-se de uma Hamiltoniana totalmente vinculada, que é uma propriedade válida para quaisquer sistemas invariantes por mudanças de coordenadas [11]. A evolução descrita por (3.47) pode ser imaginada como a percepção de um observador sobre a geometria das folhas espaciais enquanto ele caminha ao longo de uma curva temporal. Por isso as coordenadas do espaço de fase são associadas à métrica espacial, além da distribuição de massa descrita pelo campo escalar.

É importante notar que os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos primários, λ e μ^a são completamente arbitrários, enquanto os multiplicadores associados aos vínculos Hamiltoniano e de difeomorfismo são a função de lapso N e o vetor de *shift* N^a , que estão associados a uma escolha de referencial obtida pela parametrização da folheação e_t . Por isso, podemos considerar $\lambda = \mu^i = 0$, o que elimina os dois últimos termos de (3.47) e facilita a análise da evolução do sistema. Por outro lado, não é possível fazer essa escolha para N e N^a devido às restrições impostas pela folheação. Afinal, caso N e N^a fossem nulos, isso implicaria em t^a nulo, de forma que não se trataria de um campo vetorial temporal e resultaria numa folheação restrita a uma única folha espacial, tornando a noção de derivada temporal absurda. Por isso, é importante que N seja sempre não-nulo e N^a respeite o caráter temporal de t^a , ou seja, $N^2 > \|\vec{N}\|^2$.

Enfim, obtida a Hamiltoniana total, é possível fazer a análise dinâmica do espaço-tempo como uma análise canônica da história do espaço. A grande vantagem dessa abordagem, além da interpretação elegante que pode ser atribuída às equações de Einstein, é que temos a disposição todas as conhecidas ferramentas de análise do formalismo Hamiltoniano. Seguiremos então para a aplicação dos métodos discutidos no capítulo 2 à Hamiltoniana (3.47) no contexto da cosmologia.

4 Perturbações Cosmológicas

4.1 Plano de Fundo (FLRW)

Pelo seu caráter não-linear, as equações de Einstein, tanto na sua forma tensorial (3.1) quanto na sua forma Hamiltoniana (3.47), não podem ser facilmente resolvidas em toda sua generalidade. No entanto, como é de costume na física, podemos aplicar essas relações em contextos específicos, onde conseguimos obter soluções devido a simetrias intrínsecas ao caso estudado. Em particular, na cosmologia, o objetivo é analisar a evolução do universo como um todo.

A princípio, esse seria o caso mais complexo a ser estudado, já que teríamos de considerar todo conteúdo de matéria do universo ao aplicarmos as equações de Einstein, ou seja, o tensor energia-momento seria o mais completo possível, tornando essa análise inviável. No entanto, ao tratar do universo em escala suficientemente grande, torna-se razoável assumir algumas hipóteses que levam a certas simetrias na métrica induzida, simplificando consideravelmente o problema. Essas hipóteses assumidas para o universo em larga escala constituem o chamado **princípio cosmológico**.

4.1.1 Princípio Cosmológico

O princípio cosmológico parte da ideia de que, em escala suficientemente grande, o conteúdo de matéria é, em média, o mesmo em qualquer região do universo. De forma mais explícita, assumimos as seguintes simetrias:

- **Homogeneidade:** existe uma folheação $M \approx \Sigma \times \mathbb{R}$ tal que, para cada instante t e par de pontos $p, q \in \Sigma_t$, existe uma isometria do espaço-tempo que leva p em q ;
- **Isotropia:** existe uma família de curvas tipo tempo, com tangentes u^a preenchendo todo o espaço-tempo e tal que, para todo ponto p e par de vetores unitários $s_1, s_2 \in T_p M$ ortogonais a $u^a(p)$, existe uma isometria do espaço-tempo que mantém p fixo e leva s_1 em s_2 .

Essas hipóteses sintetizam a noção de que não há uma posição nem uma direção preferenciais no universo, o que é bastante razoável. Apesar de terem origem teórica, essas hipóteses são fortemente corroboradas por dados obtidos nos últimos anos, como por exemplo o espectro de potência da radiação cósmica de fundo (CMB) [16]. É comum se referir a esse modelo como **universo FLRW** (Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker), bem como a tudo aquilo que caracteriza o modelo (geometria FLRW, métrica FLRW, etc.).

A métrica de um universo FLRW sempre pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2) \right], \quad (4.1)$$

onde $a(t)$ é chamada de **fator de escala**, as coordenadas t , r , θ e ψ são chamadas de **coordenadas comóveis** e $k = -1, 0, +1$ é um parâmetro associado à curvatura espacial. Mais explicitamente, a partir da expressão (4.1), podemos calcular o escalar de Ricci espacial ${}^{(3)}R$, obtendo

$${}^{(3)}R = \frac{6k}{a(t)^2}, \quad (4.2)$$

o que evidencia o fato de que o escalar de curvatura depende somente do tempo e do parâmetro k . Isso permite classificar o universo em três possíveis categorias de acordo o sinal de ${}^{(3)}R$. Dizemos que o universo é: **fechado** no caso de curvatura positiva ($k = +1$); **plano** no caso de curvatura nula ($k = 0$) e; **aberto** no caso de curvatura negativa ($k = -1$). Ao longo deste trabalho, trataremos exclusivamente do caso plano. Porém, é de interesse para futuros trabalhos adaptar os métodos que empregaremos aqui para o caso do universo fechado. Por isso, tentaremos deixar claro os momentos em que a curvatura nula de Σ é relevante ao longo da análise.

Para um universo FLRW plano, as variáveis dinâmicas podem ser expressas na forma

$$\begin{aligned} \Phi(t, \vec{x}) &= \phi(t); \\ P_\Phi(t, \vec{x}) &= p_\phi(t); \\ q_{ab}(t, \vec{x}) &= \dot{q}_{ab}(t); \\ \pi^{ab}(t, \vec{x}) &= \dot{\pi}^{ab}(t); \end{aligned} \quad (4.3)$$

ou seja, são grandezas que dependem exclusivamente do tempo.

No caso do universo plano, Σ é homeomorfo a \mathbb{R}^3 , que tem topologia não-compacta. Por conta disso, é necessário certa cautela, pois as integrais presentes no final do capítulo 3 serão usadas aqui para tratar do universo como um todo e podem divergir se forem tomadas para todo o espaço. Para eliminar esse problema, tomaremos essas integrais sobre um volume V_0 finito porém arbitrariamente grande. Como veremos mais adiante, as equações de movimento não vão depender desse volume, de forma que ao tomarmos seu limite tendendo a infinito, isso em nada vai afetar os resultados obtidos [10].

Um último comentário relevante a ser feito sobre o princípio cosmológico é que ele é válido somente em larga escala. Afinal, quando consideramos escalas menores, como nosso Sistema Solar, existem claramente posições onde a densidade de matéria é bastante diferente: o posição do Sol tem uma densidade de matéria muito maior do que qualquer posição no espaço entre a Terra e o Sol, por exemplo. Isso é evidente, mas tem implicações bastante interessantes. Começando dessa escala em que o universo pode ser considerado

homogêneo e isotrópico (normalmente chamada escala cosmológica) e partindo para escalas cada vez menores, chegaremos a uma determinada escala na qual essas simetrias não serão mais válidas. Nessa escala, podemos considerar uma solução mais genérica do que a que temos em que (4.3), na qual a parte dominante da solução advém do universo em escala cosmológica, com pequenas perturbações em torno dessa solução. Essas perturbações carregam consigo as heterogeneidades e anisotropias presentes ao longo da evolução do universo. Podemos reescrever as variáveis dinâmicas, incluindo perturbações de primeira ordem, na forma

$$\begin{aligned}
\Phi(t, \vec{x}) &= \phi(t) + \delta\phi(t, \vec{x}); \\
P_{\Phi}(t, \vec{x}) &= p_{\phi}(t) + \delta p_{\phi}(t, \vec{x}); \\
q_{ij}(t, \vec{x}) &= \dot{q}_{ij}(t) + \delta q_{ij}(t, \vec{x}); \\
\pi^{ij}(t, \vec{x}) &= \dot{\pi}^{ij}(t) + \delta\pi^{ij}(t, \vec{x}).
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

Podemos interpretar soluções dessa forma como pequenas flutuações ($\delta\phi(\vec{x})$, por exemplo) em torno de uma média (ϕ). Explicitamente

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \frac{1}{V_0} \int \Phi(t, \vec{x}) d^3x; \\
p_{\phi}(t) &= \frac{1}{V_0} \int P_{\Phi}(t, \vec{x}) d^3x; \\
\dot{q}_{ij}(t) &= \frac{1}{V_0} \int q_{ij}(t, \vec{x}) d^3x; \\
\dot{\pi}^{ij}(t) &= \frac{1}{V_0} \int \pi^{ij}(t, \vec{x}) d^3x.
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

Por se tratarem de valores médios que caracterizam o universo em larga escala, dizemos que os parâmetros homogêneos (4.5) representam o plano de fundo (*background*).

Agora, assumindo o princípio cosmológico e fazendo uso das ferramentas discutidas no capítulo anterior, podemos prosseguir para o estudo da evolução do plano de fundo.

4.1.2 Dinâmica do Plano de Fundo

O primeiro passo na análise da dinâmica das variáveis homogêneas é estabelecer os colchetes de Poisson. Isso pode ser feito a partir das relações (3.51) e (3.44), usando as

equações (4.5). Para o campo escalar e seu momento conjugado, temos

$$\begin{aligned}
\{\phi, p_\phi\} &= \left\{ \frac{1}{V_0} \int \Phi(\vec{x}) d^3x, \frac{1}{V_0} \int P_\Phi(\vec{x}') d^3x' \right\} \\
&= \frac{1}{V_0^2} \int d^3x d^3x' \{\Phi(\vec{x}), P_\Phi(\vec{x}')\} \\
&= \frac{1}{V_0^2} \int d^3x d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\
&= \frac{1}{V_0^2} \int d^3x \\
&= \frac{1}{V_0},
\end{aligned}$$

ou seja

$$\{\phi, p_\phi\} = \frac{1}{V_0}. \quad (4.6)$$

Analogamente, para a métrica induzida e seu momento conjugado, obtemos

$$\{\dot{q}_{ij}, \dot{\pi}^{kl}\} = \frac{1}{V_0} \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l. \quad (4.7)$$

Os demais colchetes entre as variáveis homogêneas são nulos.

Usando as hipóteses de homogeneidade e isotropia, tanto a métrica induzida quanto seu momento conjugado devem ser diagonais em coordenadas cartesianas, de forma que podemos reescrevê-los como

$$\begin{aligned}
\dot{q}_{ij} &= a^2 \delta_{ij}, \\
\dot{\pi}^{ij} &= \frac{\pi_a}{6a} \delta^{ij},
\end{aligned} \quad (4.8)$$

onde a conhecido como **fator de escala** é uma função do tempo. Representamos $\dot{\pi}^{ij}$ dessa forma para que as funções a e π_a sejam canonicamente conjugadas

$$\{a, \pi_a\} = \frac{1}{V_0}, \quad (4.9)$$

relação que pode ser obtida aplicando (4.8) em (4.7).

Agora só precisamos da forma explícita da Hamiltoniana (3.47) para o caso específico no qual as variáveis canônicas têm a forma (4.3). Aqui podemos ver claramente como as simetrias simplificam o problema em mãos. Primeiramente, por estarmos lidando com folhas planas, o termo proporcional ao escalar de Ricci em \mathbb{S} se anula. Em seguida, como estamos lidando com uma métrica homogênea e folhas planas, os símbolos de Christoffel são todos nulos. Sendo assim, podemos substituir D_a por ∂_a na expressão dos vínculos. Mais do que isso, por conta da homogeneidade das variáveis, todas os termos contendo derivadas espaciais dessas derivadas se anulam. Sendo assim, o vínculo de difeomorfismo para o plano de fundo é nulo

$$\mathbb{V}_i^{(0)} = 0, \quad (4.10)$$

onde o índice (0) se refere ao fato de ser um vínculo relacionado ao plano de fundo (ordem zero da expansão perturbativa). O vínculo Hamiltoniano de ordem zero, por sua vez, é dado por

$$\mathbb{S}^{(0)} = -\frac{\kappa\pi_a^2}{12a} + \frac{p_\phi^2}{2a^3} + a^3V(\phi) \approx 0, \quad (4.11)$$

também conhecido como vínculo de Friedmann. Com isso, obtemos a Hamiltoniana que determina a dinâmica do plano de fundo

$$H_{FLRW} = \int d^3x N \mathbb{S}^{(0)} = V_0 N \left[-\frac{\kappa\pi_a^2}{12a} + \frac{p_\phi^2}{2a^3} + a^3V(\phi) \right], \quad (4.12)$$

onde estendemos a homogeneidade do sistema para a função lapso N , fazendo com que a integral resulte simplesmente em um fator de V_0 . Apesar dessa restrição, N representa uma das liberdades de calibre do sistema, o que nos permite escolher qualquer função homogênea não-nula para o lapso. Em cosmologia, duas escolhas são mais corriqueiras:

- $N = 1$, o que corresponde ao tempo próprio (ou cósmico) t ;
- $N = a$, o que corresponde ao tempo conforme η .

Usando as relações (4.6) e (4.9), obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\dot{a} = \{a, H_{FLRW}\} = -\frac{\kappa\pi_a}{6a}, \quad (4.13)$$

$$\dot{\pi}_a = \{\pi_a, H_{FLRW}\} = -\left[\frac{\kappa\pi_a^2}{12a^2} - \frac{3p_\phi^2}{2a^4} + 3a^2V(\phi) \right], \quad (4.14)$$

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_{FLRW}\} = \frac{p_\phi}{a^3}, \quad (4.15)$$

$$\dot{p}_\phi = \{p_\phi, H_{FLRW}\} = -a^3 \frac{dV}{d\phi}. \quad (4.16)$$

Isolando p_ϕ na terceira equação acima e substituindo na última, obtemos a equação de campo:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (4.17)$$

De forma similar, isolando π_a na primeira equação, substituindo na segunda e usando o vínculo de Friedmann, obtemos a equação da aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{2} \left[\frac{\rho}{3} + P \right], \quad (4.18)$$

onde $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ e $P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ correspondem respectivamente às densidades de energia e pressão do campo ϕ .

Solucionando as equações diferenciais acima, obtém-se a métrica espacial q_{ab} através de (4.8) (e conseqüentemente a métrica do espaço-tempo g_{ab}) bem como o campo escalar $\phi(t)$ para o universo FLRW.

Esse caso expõe claramente o quanto o princípio cosmológico simplificou o problema inicial. As hipóteses de homogeneidade e isotropia das variáveis dinâmicas possibilitam obter as equações de evolução do plano de fundo de forma bastante direta. Como discutimos anteriormente, essas soluções correspondem aos valores médios das variáveis dinâmicas, em torno dos quais teremos pequenos desvios. Esses desvios, no entanto, não possuem mais as simetrias preditas pelo princípio cosmológico. Por isso, para estudar a evolução das perturbações, é necessário o uso de métodos mais elaborados, como discutiremos a seguir.

4.2 Perturbações no Universo Plano

4.2.1 Variáveis Dinâmicas

As perturbações são definidas na equação (4.4) como sendo as variáveis totais menos a parte homogênea, ou seja

$$\begin{aligned}
\delta\phi(t, \vec{x}) &= \Phi(t, \vec{x}) - \phi(t); \\
\delta p_\phi(t, \vec{x}) &= P_\Phi(t, \vec{x}) - p_\phi(t); \\
\delta q_{ab}(t, \vec{x}) &= q_{ab}(t, \vec{x}) - \dot{q}_{ab}(t); \\
\delta\pi^{ab}(t, \vec{x}) &= \pi^{ab}(t, \vec{x}) - \dot{\pi}^{ab}(t).
\end{aligned}
\tag{4.19}$$

A partir dessas expressões e usando os colchetes (3.51) e (4.6), conseguimos estabelecer o colchete de Poisson entre as perturbações $\delta\phi$ e δp_ϕ :

$$\begin{aligned}
\{\delta\phi(\vec{x}), \delta p_\phi(\vec{x}')\} &= \{\Phi(\vec{x}) - \phi, P_\Phi(\vec{x}') - p_\phi\} \\
&= \{\Phi(\vec{x}), P_\Phi(\vec{x}')\} - \{\Phi(\vec{x}), p_\phi\} - \{\phi, P_\Phi(\vec{x}')\} + \{\phi, p_\phi\} \\
&= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{1}{V_0} \int d^3x' \{\Phi(\vec{x}), P_\Phi(\vec{x}')\} - \frac{1}{V_0} \int d^3x \{\Phi(\vec{x}), P_\Phi(\vec{x}')\} + \frac{1}{V_0} \\
&= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{1}{V_0} \int d^3x' \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{1}{V_0} \int d^3x \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{1}{V_0} \\
&= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{1}{V_0},
\end{aligned}$$

e de forma similar podemos calcular o colchete entre as variáveis δq_{ab} e $\delta\pi^{ab}$. Obtemos assim os colchetes

$$\begin{aligned}
\{\delta\phi(\vec{x}), \delta p_\phi(\vec{x}')\} &= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{1}{V_0}; \\
\{\delta q_{ij}(\vec{x}), \delta\pi^{kl}(\vec{x}')\} &= \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \left[\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{1}{V_0} \right].
\end{aligned}
\tag{4.20}$$

Os demais colchetes entre perturbações são todos nulos. É interessante notar que a distribuição $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{1}{V_0}$ é o delta de Dirac para campos puramente heterogêneos. Isso pode ser visto pensando no que acontece quando multiplicamos esse fator por uma função $f(\vec{x})$ qualquer e integramos na região do volume V_0 (*smearing*). O termo contendo $\frac{1}{V_0}$ é

simplesmente a média de $f(\vec{x})$, como vimos em (4.5), enquanto o primeiro termo resulta em $\int d^3x f(\vec{x})\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') = f(\vec{x}')$. Assim, o resultado dessa operação é $f(\vec{x}) - \frac{1}{V_0} \int d^3x f(\vec{x})$, ou seja, a função menos sua média, sobrando somente a parte puramente heterogênea de $f(\vec{x})$.

Como $\delta q_{ij}(\vec{x})$ é simétrico, a princípio temos, para cada ponto do espaço, 6 graus de liberdade mais um grau de liberdade para a perturbação $\delta\phi(\vec{x})$, além dos outros 7 graus de liberdade associados aos respectivos momentos conjugados, num total de 14 graus de liberdade. No entanto, essas perturbações também estão submetidas aos 4 vínculos \mathbb{S} e \mathbb{V}_i , e como cada vínculo elimina 2 graus de liberdade do sistema, obtemos por fim 6 graus de liberdade no espaço de fase das perturbações. Com o objetivo de isolar esses 6 campos físicos, faremos a chamada **decomposição escalar-vetorial-tensorial** ou **decomposição SVT**, que será discutida na próxima seção. Essa decomposição pode ser realizada no espaço de Fourier [10]. Como estamos lidando com o caso do universo plano, começamos expandindo as perturbações em seus modos de Fourier por ondas planas:

$$\begin{aligned}\delta\phi(\vec{x}) &= \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \delta\tilde{\phi}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \delta p_\phi(\vec{x}) &= \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \delta\tilde{p}_\phi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \delta q_{ij}(\vec{x}) &= \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \delta\tilde{q}_{ij}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \delta\pi^{ij}(\vec{x}) &= \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\end{aligned}\tag{4.21}$$

Para estender a análise para o domínio de Fourier, é necessário encontrar os colchetes de Poisson entre os modos das perturbações. Faremos esse cálculo para o colchete entre os modos da métrica e os modos do seu momento conjugado. O cálculo para os modos do campo escalar são totalmente análogos.

Usando a expansão (4.21) em (4.20), temos

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \delta\tilde{q}_{ij}(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \delta\tilde{\pi}^{kl}(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} &= \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \left[\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') - \frac{1}{V_0} \right] \\ \frac{1}{V_0^2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \{ \delta\tilde{q}_{ij}(\vec{k}), \delta\tilde{\pi}^{kl}(\vec{k}') \} &= \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \left[\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') - \frac{1}{V_0} \right].\end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados da expressão acima por $e^{i\vec{k}''\cdot\vec{x}}$ e integrando em \vec{x} , obtemos

$$\frac{1}{V_0^2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \{ \delta\tilde{q}_{ij}(\vec{k}), \delta\tilde{\pi}^{kl}(\vec{k}') \} \int e^{i(\vec{k}+\vec{k}'')\cdot\vec{x}} d^3x = \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \int e^{i\vec{k}''\cdot\vec{x}} \left[\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') - \frac{1}{V_0} \right] d^3x.$$

No lado esquerdo da expressão acima, a integral resulta em $V_0\delta_{\vec{k}, -\vec{k}''}$. Do lado direito, a integral com o primeiro termo resulta em $e^{i\vec{k}''\cdot\vec{x}'}$ enquanto a integral com o segundo termo

é nula. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} \{ \delta \tilde{q}_{ij}(\vec{k}), \delta \tilde{\pi}^{kl}(\vec{k}') \} \delta_{\vec{k}, -\vec{k}''} &= \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{x}'} \\ \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}'} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} \{ \delta \tilde{q}_{ij}(-\vec{k}''), \delta \tilde{\pi}^{kl}(\vec{k}') \} &= \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}', \vec{k}''} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}'}, \end{aligned}$$

onde usamos a identidade $e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{x}'} = \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}', \vec{k}''} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}'}$. Substituindo \vec{k}'' por $-\vec{k}$, obtemos enfim o colchete de Poisson entre os modos de Fourier da métrica induzida e seu momento conjugado:

$$\{ \delta \tilde{q}_{ij}(\vec{k}), \delta \tilde{\pi}^{kl}(\vec{k}') \} = V_0 \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}. \quad (4.22)$$

De maneira similar, obtemos

$$\{ \delta \tilde{\phi}(\vec{k}), \delta \tilde{p}_\phi(\vec{k}') \} = V_0 \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}. \quad (4.23)$$

4.2.2 Decomposição SVT e Liberdade de Calibre

Nesta subseção, discutiremos a decomposição SVT e suas propriedades. Para isso, é necessário discutir um pouco mais sobre a teoria de perturbações lineares no contexto da relatividade geral. O propósito do método perturbativo é encontrar soluções novas a partir de soluções conhecidas para casos razoavelmente próximos. Consideremos uma equação de Einstein (3.1) cuja solução g_{ab} é conhecida. Caso estejamos interessados em estudar um caso bastante próximo (por exemplo, um pequena modificação δT_{ab} no tensor energia-momento original), podemos procurar por soluções próximas da que conhecemos. Ou seja, queremos soluções na forma $g_{ab} + \delta g_{ab}$ onde o termo g_{ab} seja dominante.

Tomando o caso do universo FLRW plano como solução conhecida, podemos escrever uma solução perturbada como

$$\begin{aligned} g_{00}(t, \vec{x}) &= -1 + h_{00}(t, \vec{x}) \\ g_{i0}(t, \vec{x}) &= a(t) h_{i0}(t, \vec{x}) \\ g_{ij}(t, \vec{x}) &= a(t)^2 [\delta_{ij} + h_{ij}(t, \vec{x})], \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde h_{00} , h_{0i} e h_{ij} são pequenas perturbações da métrica. É possível realizar uma decomposição das perturbações de forma a descoplar seus diferentes modos.

Para isso, começamos definindo

$$h_{00} = -2A.$$

Em seguida, por tratar-se de um 3-vetor, podemos reescrever h_{0i} usando a decomposição de Helmholtz [17], separando as partes longitudinal e transversal:

$$h_{0i} = \partial_i B + B_i \quad (4.25)$$

onde B é um escalar espacial e B^i é um 3-vetor¹ de divergência nula, ou seja,

$$\partial^i B_i = 0. \quad (4.26)$$

Por fim, podemos usar a decomposição de Hodge em h_{ij} :

$$h_{ij} = C\delta_{ij} - \partial_i \partial_j E + \partial_i V_j + \partial_j V_i + h_{ij}^{TT}, \quad (4.27)$$

onde C e E são escalares espaciais, V^i é um 3-vetor de divergência nula,

$$\partial_i V^i = 0, \quad (4.28)$$

e h_{ij}^{TT} é um tensor espacial simétrico, de divergência nula e traço nulo:

$$\begin{aligned} \partial^i h_{ij}^{TT} &= 0, \\ \delta^{ij} h_{ij}^{TT} &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Com isso, conseguimos separar as partes escalares, vetoriais e tensoriais de cada componente $h_{\mu\nu}$. A parte escalar das perturbações seriam todos os termos contendo A , B , C e E , enquanto a parte vetorial corresponde somente aos termos envolvendo B^i e V^i , e a parte tensorial consiste apenas de h_{ij}^{TT} . Existe um importante resultado em relatividade geral, o teorema da decomposição, que afirma que, em primeira ordem, cada um dos tipos de perturbação evolui separadamente dos demais [17]. Por exemplo, caso estejamos interessados em estudar a evolução das perturbações escalares, não precisamos saber o que acontece com as perturbações vetoriais nem tensoriais. Além disso, perturbações escalares não podem dar origem a perturbações de outro tipo ao longo de sua evolução.

O efeito de transformações de coordenadas sobre essas perturbações deixa essa independência mais evidente. Como estamos lidando com perturbações, iremos considerar apenas transformações de coordenadas tais que seu efeito sobre as variáveis originais ainda seja pequeno o bastante para ser considerado uma perturbação. Ou seja, queremos ver o efeito de transformações de coordenadas do tipo

$$\begin{aligned} t &\mapsto t' = t + \zeta(t, \vec{x}); \\ x^i &\mapsto x'^i = x^i + \partial^i \xi(t, \vec{x}) + \alpha^i(t, \vec{x}), \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde ζ e ξ são funções no espaço-tempo e α^i é um vetor espacial de divergência nula, todos de pequena magnitude. No caso da variação de x^i , apenas aplicamos a decomposição de Helmholtz no que seria o δx para que fique evidente mais uma vez a contribuição escalar e a vetorial.

¹ Ao longo dessa subseção, subiremos e descenderemos índices usando δ_{ij} por estarmos lidando com perturbações no universo FLRW plano

É possível mostrar que, sob a transformação descrita acima, as perturbações escalares se transformam da seguinte forma [17]:

$$\begin{aligned}
A &\mapsto A - \partial_t \zeta, \\
B &\mapsto B - \frac{1}{a} \zeta + a \partial_t \xi, \\
C &\mapsto C - \frac{\dot{a}}{a} \zeta, \\
E &\mapsto E + \xi,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

e como esperado, os resultados não produziram nenhum tipo de perturbação que não seja escalar. Para as perturbações vetoriais, temos

$$V^i \mapsto V^i - \alpha^i, \tag{4.32}$$

que é puramente vetorial, notando que α^i é a parte puramente vetorial de δx . O caso das perturbações tensoriais é particularmente interessante:

$$h_{ij}^{TT} \mapsto h_{ij}^{TT} \tag{4.33}$$

ou seja, h_{ij}^{TT} é invariante por transformações de coordenadas. Isso significa que as perturbações tensoriais são grandezas físicas e não existe uma escolha de calibre capaz de fazer com que surjam ou desapareçam perturbações dessa natureza. Já o efeito dessas mudanças de coordenada na perturbação do campo escalar é dada por

$$\delta\Phi(t, \vec{x}) \mapsto \delta\Phi(t, \vec{x}) - \frac{d\phi}{dt}(t) \zeta(t, \vec{x}), \tag{4.34}$$

mostrando que, como essa perturbação é relativa ao campo escalar do plano de fundo, e já que o campo homogêneo depende da escolha da coordenada temporal, a forma da perturbação também vai depender dessa escolha.

Entender como transformações de coordenada afetam as perturbações nos permite usar essa liberdade de escolha para simplificar a análise. Um calibre bastante útil e que será usado neste trabalho é o **fatiamiento plano**, que consiste no calibre no qual a parte espacial da métrica, do ponto de vista das perturbações escalares, pode ser escrita como $g_{ij} = a^2 \delta_{ij}$. O elemento de linha pode ser escrito como:

$$ds^2 = -[1 + 2A(t, \vec{x})] dt^2 - 2a(t) \partial_i B dt dx^i + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \tag{4.35}$$

ou seja, trata-se de uma escolha de calibre na qual as perturbações escalares C e E (partes escalares de h_{ij}) são nulas. Para isso, partindo da forma geral dessas perturbações, podemos fazer a mudança de coordenadas com

$$\begin{aligned}
\zeta &= \frac{a}{\dot{a}} C, \\
\xi &= -E.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a parcela escalar das perturbações é caracterizada somente pelas funções A e B . Como nosso objetivo nesse texto é focar nas perturbações escalares, o uso do fatiamento plano nos permite fazer cálculos considerando somente a parte homogênea da métrica induzida, $a^2\delta_{ij}$.

4.2.3 Decomposição SVT no espaço de Fourier

Retornemos a discussão para o espaço de fase. Feita a expansão em série de Fourier das perturbações (4.21), é possível criar uma base ortonormal no espaço dos momentos com 6 elementos formando 3 pares de modos escalares, vetorial e tensorial [10]:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(1)} &= \frac{\dot{q}_{ij}}{\sqrt{3}}, & A_{ij}^{(2)} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{\dot{q}_{ij}}{3} \right), \\ A_{ij}^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{k}_i \hat{x}_j + \hat{k}_j \hat{x}_i), & A_{ij}^{(4)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{k}_i \hat{y}_j + \hat{k}_j \hat{y}_i), \\ A_{ij}^{(5)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_i \hat{y}_j + \hat{x}_j \hat{y}_i), & A_{ij}^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_i \hat{x}_j - \hat{y}_i \hat{y}_j), \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde \hat{k} é o unitário da direção de \vec{k} e \hat{k} , \hat{x} e \hat{y} formam um conjunto ortonormal de vetores unitários. É fácil mostrar que

$$A_{ij}^{*(n)}(\vec{k}) A_{(m)}^{ij}(\vec{k}) = \delta_m^n. \quad (4.37)$$

Os comportamentos escalar, vetorial e tensorial dos termos da base podem não ser tão evidentes a princípio, mas fica claro quando consideramos, dado um certo \vec{k} , o grupo de rotações que mantêm \hat{k} fixo, mas alteram \hat{x} e \hat{y} . Sob essas transformações, é evidente que $A_{ij}^{(1)}$ e $A_{ij}^{(2)}$ não serão alterados, pois não dependem nem de \hat{x} nem de \hat{y} . Da mesma forma, podemos ver que $A_{ij}^{(3)}$ e $A_{ij}^{(4)}$ se transformam como vetores, enquanto $A_{ij}^{(5)}$ e $A_{ij}^{(6)}$ se transformam como (0,2)-tensores.

Podemos então expandir as perturbações $\delta\tilde{q}_{ij}(\vec{k})$ e $\delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k})$ nessa base:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{q}_{ij}(\vec{k}) &= \sum_{n=1}^6 \tilde{\gamma}_n(\vec{k}) A_{ij}^{(n)}(\vec{k}), \\ \delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k}) &= \sum_{n=1}^6 \tilde{\pi}_n(\vec{k}) A_{(n)}^{ij}(\vec{k}), \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde $\tilde{\gamma}_n(\vec{k})$ e $\tilde{\pi}_n(\vec{k})$ são chamados de **modos** de $\delta\tilde{q}_{ij}(\vec{k})$ e $\delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k})$, respectivamente. Por conta da forma como os $A_{ij}^{(n)}(\vec{k})$ se transformam, chamamos os $\tilde{\gamma}_n(\vec{k})$ e $\tilde{\pi}_n(\vec{k})$ de: modos escalares para $n = 1, 2$; modos vetoriais para $n = 3, 4$ e; modos tensoriais para $n = 5, 6$. Como os $A_{ij}^{(n)}(\vec{k})$ formam uma base ortonormal, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_n(\vec{k}) &= A_{(n)}^{ij}(\vec{k}) \delta\tilde{q}_{ij}(\vec{k}), \\ \tilde{\pi}_n(\vec{k}) &= A_{ij}^{(n)}(\vec{k}) \delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k}). \end{aligned}$$

Podemos então usar (4.20) para encontrar os colchetes de Poisson entre os modos:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\gamma}_n(\vec{k}), \tilde{\pi}_m(\vec{k}')\} &= A_{(n)}^{ij} A_{rs}^{(m)} \{\delta\tilde{q}_{ij}(\vec{k}), \delta\tilde{\pi}^{rs}(\vec{k}')\} \\ &= V_0 \delta_{nm} \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}, \\ \{\tilde{\gamma}_n(\vec{k}), \tilde{\gamma}_m(\vec{k}')\} &= 0, \\ \{\tilde{\pi}_n(\vec{k}), \tilde{\pi}_m(\vec{k}')\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

Com 6 pares de modos $\tilde{\gamma}_n(\vec{k})$ e $\tilde{\pi}_n(\vec{k})$ juntamente com o par $\delta\tilde{\phi}(\vec{k})$ e $\delta\tilde{p}_\phi(\vec{k})$, temos um total de 14 coordenadas, como no início. Os vínculos Hamiltoniano e de difeomorfismo se estendem para as perturbações, e assim obtemos novas relações entre esses modos, estabelecendo os vínculos entre essas variáveis. Sendo assim, o número de graus de liberdade é 6 (pois temos 4 vínculos) e podemos usar as variáveis livres para estabelecer calibres conforme desejarmos, desde que as demais restrições sejam satisfeitas.

Na descrição em modos, o fatiamento plano é dado pela seguinte escolha [10]:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0, \quad (4.40)$$

e como lidaremos apenas com modos escalares de agora em diante, podemos considerar $\delta\tilde{q}$ como nulo ao longo de toda a análise. O fatiamento plano faz uso de toda liberdade de calibre disponível.

Agora, usando a decomposição SVT para isolar as perturbações escalares, fazendo a decomposição das perturbações em seus modos, estabelecendo suas relações canônicas e escolhendo o fatiamento plano como calibre, estamos prontos para expandir a Hamiltoniana em uma série perturbativa, para que possamos finalmente obter uma descrição da dinâmica das perturbações (escalares).

4.2.4 Hamiltoniana das perturbações cosmológicas

Para obter a Hamiltoniana das perturbações escalares, começamos reescrevendo os vínculos

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \frac{N\sqrt{q}}{2\kappa} {}^{(3)}R + \frac{1}{2\sqrt{q}} P_\Phi^2 \\ &+ \frac{\sqrt{q}}{2} D_i \Phi D^i \Phi + \sqrt{q} V(\Phi) \approx 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\mathbb{V}_i = -2\sqrt{q} q_{ij} D_l \left(\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{q}} \right) + P_\Phi D_i \Phi \approx 0 \quad (4.42)$$

como séries perturbativas:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(\vec{x}) &= \mathbb{S}^{(0)} + \mathbb{S}^{(1)}(\vec{x}) + \mathbb{S}^{(2)}(\vec{x}) + \dots \\ \mathbb{V}_i(\vec{x}) &= \mathbb{V}_i^{(0)} + \mathbb{V}_i^{(1)}(\vec{x}) + \mathbb{V}_i^{(2)}(\vec{x}) + \dots, \end{aligned} \quad (4.43)$$

ou seja, o índice (0) indica os termos dos vínculos que são independentes das perturbações, o índice (1) indica dependência linear com relação às perturbações e o índice (2) são os termos de segunda ordem. Para isso, basta substituir (4.4) em (4.41) e (4.42), usando a expansão em série de Fourier e a decomposição SVT quando necessário. Esses cálculos, apesar de bastante diretos, são bastante extensos e podem ser vistos em detalhe no Apêndice B. Os termos do vínculo \mathbb{S} até segunda ordem são

$$\mathbb{S}^{(0)} = -\frac{\kappa}{12a}\pi_a^2 + \frac{1}{2a^3}p_\phi^2 + a^3V(\phi) \quad (4.44)$$

$$\mathbb{S}^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{\kappa}{\sqrt{3}a^2}\pi_a\pi_1(\vec{x}) + \frac{1}{a^3}p_\phi\delta p_\phi(\vec{x}) + a^3V'(\phi)\delta\phi \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{(2)}(\vec{x}) &= -\frac{\kappa\pi_1^2(\vec{x})}{a^3} - \frac{\kappa\pi_2^2(\vec{x})}{a^3} + \frac{1}{2a^3}\delta p_\phi^2(\vec{x}) \\ &+ \frac{a^3}{2}\partial_i\delta\phi(\vec{x})\partial^i\delta\phi(\vec{x}) + \frac{a^3}{2}V''(\phi)\delta\phi^2 \\ &+ \frac{3\kappa}{a^3}\partial^i\partial^j\partial^{-2}\pi_2(\vec{x})\partial_i\partial_j\partial^{-2}\pi_2(\vec{x}), \end{aligned} \quad (4.46)$$

enquanto os termos do vínculo \mathbb{V}_i até segunda ordem são

$$\mathbb{V}_i^{(0)} = 0; \quad (4.47)$$

$$\mathbb{V}_i^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\partial_i\pi_1(\vec{x}) - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\partial_i\pi_2(\vec{x}) + p_\phi\partial_i\delta\phi(\vec{x}) \quad (4.48)$$

$$\mathbb{V}_i^{(2)}(\vec{x}) = \delta p_\phi(\vec{x})\partial_i\delta\phi(\vec{x}), \quad (4.49)$$

onde

$$\pi_n(\vec{x}) := \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \tilde{\pi}_n(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (4.50)$$

para $n = 1, 2$ corresponde à transformada inversa dos modos escalares de $\delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k})$. Aqui vale lembrar que, por conta da escolha de calibre, não aparecem termos similares para $\tilde{\gamma}_n(\vec{k})$ em nenhum dos termos das séries acima.²

Como pequenas perturbações nas variáveis dinâmicas implicam na quebra das simetrias, é necessário estender essas noções também para a escolha de referencial adotada. Isso pode ser feito através da função lapso e do vetor de *shift*, escrevendo-os como $N + \delta N(\vec{x})$ e $N^i + \delta N^i(\vec{x})$ respectivamente, onde N e N^i representam os parâmetros homogêneos, enquanto os termos com δ representam suas respectivas perturbações (que assim como no caso das variáveis dinâmicas, carregam consigo toda heterogeneidade e anisotropia desses parâmetros). Além disso, $N^i = 0$ por isotropia. Usando isso, juntamente com a expansão (4.43), em (3.47), podemos escrever a Hamiltoniana total também como uma

² Por consistência, é necessário impor que $\hat{\gamma}_n(\vec{k}) = 0$ para que o calibre se mantenha ao longo de toda análise. Essa imposição, no entanto, não interfere na análise até segunda ordem nas perturbações. Em terceira ordem, essas condições de consistência impõem novos vínculos envolvendo as perturbações do lapso e do *shift* [10].

série perturbativa:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x [N + \delta N(\vec{x})][\mathbb{S}^{(0)} + \mathbb{S}^{(1)}(\vec{x}) + \mathbb{S}^{(2)}(\vec{x})] + \delta N^i(\vec{x})[\mathbb{V}_i^{(1)}(\vec{x}) + \mathbb{V}_i^{(2)}(\vec{x})] \\ &= H^{(0)} + H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(3)}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

o que define os termos da série como

$$\begin{aligned} H^{(0)} &:= \int d^3x N \mathbb{S}^{(0)} \\ H^{(1)} &:= \int d^3x [\delta N(\vec{x}) \mathbb{S}^{(0)} + N \mathbb{S}^{(1)}(\vec{x})] \\ H^{(2)} &:= \int d^3x [N \mathbb{S}^{(2)}(\vec{x}) + \delta N(\vec{x}) \mathbb{S}^{(1)}(\vec{x}) + \delta N^i(\vec{x}) \mathbb{V}_i^{(1)}(\vec{x})] \\ H^{(3)} &:= \int d^3x [\delta N(\vec{x}) \mathbb{S}^{(2)}(\vec{x}) + \delta N^i(\vec{x}) \mathbb{V}_i^{(2)}(\vec{x})]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

As perturbações são feitas em torno da solução para o universo FLRW, logo é natural impor que os resultados encontrados na primeira seção deste capítulo continuem válidos, já que eles envolvem apenas as variáveis homogêneas, que são assumidas dominantes. Sendo assim, $\mathbb{S}^{(0)} \approx 0$ mesmo quando estudamos apenas as perturbações.

O próximo passo envolve impor os vínculos de primeira ordem, $\mathbb{S}^{(1)} = 0$ e $\mathbb{V}_i^{(1)} = 0$, com o objetivo de escrever as variáveis π_1 e π_2 em termos de $\delta\phi$ e δp_ϕ . Isolando π_1 em (4.45), temos que

$$\pi_1 = \frac{\sqrt{3}}{\kappa\pi_a} \left[\frac{p_\phi}{a} \delta p_\phi + a^5 V'(\phi) \delta\phi \right]. \quad (4.53)$$

Usando esse resultado em (4.48) e isolando π_2 , temos que

$$\pi_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{p_\phi}{2} - \frac{a^5 V'(\phi)}{\kappa\pi_a} \right) \delta\phi - \frac{p_\phi}{\kappa a \pi_a} \delta p_\phi \right]. \quad (4.54)$$

Outra consequência da imposição desses vínculos é que as Hamiltonianas de ordem zero e de primeira ordem sejam totalmente vinculadas. Além disso, a Hamiltoniana de segunda ordem torna-se simplesmente

$$H^{(2)} = \int d^3x N \mathbb{S}^{(2)}(\vec{x}), \quad (4.55)$$

ou seja, as perturbações do lapso e do *shift* tornam-se relevantes apenas na Hamiltoniana de terceira ordem, que não será estudada neste trabalho. Sendo assim, nos resta substituir as expressões encontradas para π_1 e π_2 em $\mathbb{S}^{(2)}$ para obtermos a Hamiltoniana das perturbações em termos das perturbações do campo escalar e de seu momento conjugado. Para isso, é útil notar a partir das relações (4.53) e (4.54) que

$$\pi_2^2 = \frac{1}{2} \pi_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi_1 p_\phi \delta\phi + \frac{3}{8} p_\phi^2 \delta\phi^2,$$

o que permite algumas simplificações. Além disso, podemos fazer duas integrações por partes para lidar com o termo envolvendo a inversa da Laplaciana ∂^{-2} :

$$\begin{aligned} \int d^3x \frac{3\kappa}{a^3} \partial^i \partial^j \partial^{-2} \pi_2(\vec{x}) \partial_i \partial_j \partial^{-2} \pi_2(\vec{x}) &= \int d^3x \frac{3\kappa}{a^3} \partial^i \partial_i \partial^{-2} \pi_2(\vec{x}) \partial^j \partial_j \partial^{-2} \pi_2(\vec{x}) \\ &= \int d^3x \frac{3\kappa}{a^3} \pi_2^2. \end{aligned}$$

Por fim, é necessário realizar a transformação canônica

$$\delta p_\phi \mapsto \delta \bar{p}_\phi = \delta p_\phi - \frac{3p_\phi^2}{a\pi_a} \delta\phi \quad (4.56)$$

para eliminar um termo envolvendo $\delta\phi\delta p_\phi$. Feita essa transformação, renomeamos $\delta \bar{p}_\phi$ como δp_ϕ novamente e obtemos a finalmente a Hamiltoniana das perturbações

$$H^{(2)} = \frac{N}{2} \int d^3x \left[\frac{1}{a^3} \delta p_\phi^2 + a^3 (\vec{\partial}\delta\phi)^2 + a^3 \mathcal{U} \delta\phi^2 \right], \quad (4.57)$$

onde

$$\mathcal{U} = -9 \frac{p_\phi^4}{a^8 \pi_a^2} + \frac{3}{2} \kappa \frac{p_\phi}{a^6} - \frac{6p_\phi}{a\pi_a} V' + V''. \quad (4.58)$$

A partir de (4.57), podemos usar os colchetes de Poisson

$$\begin{aligned} \delta \dot{\phi} &= \{\delta\phi, H^{(2)}\}, \\ \delta \dot{p}_\phi &= \{\delta p_\phi, H^{(2)}\}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

para obter a equação de movimento

$$[\square - \mathcal{U}(t)]\delta\phi(t, \vec{x}) = 0, \quad (4.60)$$

onde \square é o D'Alambertiano da métrica FLRW. Ou seja, obtemos uma equação de movimento linear com relação à perturbação do campo escalar. Essa equação descreve a dinâmica das perturbações cosmológicas, o que pode parecer demasiado simples já que a (4.60) envolve somente a perturbação do campo escalar. No entanto, essa equação é consequência de todas as hipóteses que assumimos ao longo do caminho, incluindo os vínculos de ordem zero e primeira ordem. Os vínculos de primeira ordem estabelecem uma relação direta entre a perturbação do campo escalar e a perturbação da métrica (através dos modos π_1 e π_2) de forma que uma vez encontradas as perturbações $\delta\phi$, as demais podem ser obtidas por meios dos vínculos.

5 Conclusões

Ao longo dessa dissertação, vimos em detalhe como estabelecer o formalismo Hamiltoniano das perturbações cosmológicas. Começamos estudando sistemas Hamiltonianos vinculados e vimos que, apesar de se tratar de uma generalização, os vínculos surgem naturalmente ao longo da análise e após seu tratamento, o método é bastante similar ao que estamos acostumados.

Em seguida, vimos como a folheação do espaço-tempo nos permitiu definir um campo normal n^a , que por sua vez nos permitiu definir o campo temporal t^a , que está intimamente relacionado à escolha de referencial. Essa associação se dá através da função lapso N e do vetor de *shift* N^a . A partir do campo temporal, conseguimos estabelecer uma noção bem definida de derivada temporal como a derivada de Lie com relação a t^a . Além disso, a folheação nos permite obter a métrica induzida q_{ab} sobre as folhas espaciais a partir da métrica do espaço-tempo g_{ab} . Com isso, a interpretação do espaço-tempo como a história do espaço se torna bastante palpável. Ao reescrever a ação de Einstein-Hilbert em termos dessas variáveis usando as relações de curvatura descritas, obtivemos os vínculos primários a partir dos momentos conjugados de N e N^a , e a partir da Hamiltoniana “primária” e das condições de consistência sobre os vínculos primários, obtivemos então os vínculos secundários \mathbb{S}_G e \mathbb{V}_i^G que descrevem totalmente a Hamiltoniana proveniente da ação de Einstein-Hilbert. Fizemos então um tratamento semelhante a partir da Lagrangiana de acoplamento mínimo L_M do campo escalar $\Phi(\vec{x})$, de onde tiramos outros dois vínculos \mathbb{S}_M e \mathbb{V}_i^M . Ao escrevermos a Hamiltoniana total (incluindo a influência da matéria), vimos que N e N^a atuam como multiplicadores de Lagrange relativos aos vínculos \mathbb{S} e \mathbb{V}_i , o que reforça o caráter arbitrário dessas variáveis, com a ressalva de que o lapso e o *shift* devem ser escolhidos de forma que o campo temporal seja tipo tempo. Os vínculos primários $p_N = 0$ e $p_a = 0$ também apontam para o fato de que esses multiplicadores não devem ter influência sobre a dinâmica do espaço-tempo.

Já no Capítulo 4 vimos que o princípio cosmológico impõe duas importantes simetrias sobre o plano de fundo: a homogeneidade e a isotropia, que são fortemente corroboradas pelas medições da CMB. Essas simetrias nos permitem interpretar as variáveis dinâmicas correspondentes ao plano de fundo como uma média sobre uma região de volume arbitrariamente grande. A geometria espacial é então completamente descrita por uma única variável a , o fator de escala, com momento conjugado p_a . Assumindo a partir de então que estamos lidando com o universo plano, conseguimos realizar uma transformação canônica de q_{ij} para a com momento conjugado π_a . A forma dos vínculos \mathbb{S} e \mathbb{V}_i fica bastante simplificada nesse caso, e podemos encontrar as equações de movimento a partir das variáveis a , π_a e ϕ e p_ϕ . A combinação dessas equações resulta nas conhecidas

equações da aceleração e de Klein-Gordon, mostrando que o formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral fornece o mesmo conjunto de equações da análise tradicional partindo das equações de Einstein, o que era esperado mas reforça o fato de que as duas abordagens são equivalentes.

Então, decomposemos as variáveis dinâmicas em uma parcela homogênea predominante (média) somada de uma pequena perturbação que carregaria consigo toda parte não-simétrica dessas variáveis. Fizemos então a expansão em ondas planas das perturbações e obtivemos os colchetes entre os coeficientes das perturbações, o que nos permitiu fazer a análise no espaço de momentos \vec{k} . Discutimos então a decomposição SVT, uma ferramenta poderosa que nos permite estudar isoladamente os modos escalares, vetoriais ou tensoriais das perturbações. Vimos, pela forma como esses modos se transformam, que é sempre possível realizar uma transformação de coordenadas de tal forma a obter o chamado fatiamento plano. Essa escolha de calibre simplifica enormemente a análise, pois faz com que os modos escalares sejam totalmente caracterizados pelo campo escalar e seu momento conjugado, nos permitindo usar $q_{ij} = a\delta_{ij}$ ao longo de todos os cálculos a partir de então. A partir dessas transformações também conseguimos constatar que os modos tensoriais são invariantes por calibre, ou seja, correspondem a grandezas físicas (que estão intimamente relacionadas com ondas gravitacionais). Conscientes da decomposição SVT, voltamos ao espaço de momentos, onde mostramos que é possível decompor os coeficientes $\delta\tilde{q}_{ij}$ e $\delta\tilde{\pi}^{ij}$ em termos de uma base ortonormal $A_{ij}^{(n)}$, cujos elementos podem ser divididos em 3 pares: 2 escalares, 2 vetoriais e 2 tensoriais. Com essa decomposição, fomos capazes de fixar o calibre de fatiamento plano no espaço dos momentos e vimos que essa escolha esgota completamente a liberdade de calibre do sistema, de forma que os modos escalares são completamente descritos por $\delta\tilde{\phi}$ e $\delta\tilde{p}_\phi$.

Focando exclusivamente na parte escalar das perturbações, encontramos as séries perturbativas dos vínculos até segunda ordem. Aqui é um bom momento para apreciar o quão útil foi fazer a expansão em série de Fourier das perturbações, pois caso isso não tivesse sido feito, encontrar os termos de segunda ordem desses vínculos (como por exemplo o termo proporcional a $\partial^i\partial^j\partial^{-2}\pi_2(\vec{x})\partial_i\partial_j\partial^{-2}\pi_2(\vec{x})$) teria sido certamente muito mais trabalhoso. Encontradas as séries perturbativas dos vínculos, a série perturbativa da Hamiltoniana segue naturalmente. Impondo os vínculos de ordem zero (para que a solução homogênea continue sendo solução) e de primeira ordem, conseguimos escrever os modos escalares do momento conjugado à perturbação da métrica em termos da perturbação do campo escalar e seu momento conjugado, $\pi_1 = \pi_1(\delta\phi, \delta p_\phi)$ e $\pi_2 = \pi_2(\delta\phi, \delta p_\phi)$. Feita essa imposição, os termos de ordem zero e de primeira ordem da série perturbativa da Hamiltoniana se anulam, e a dinâmica das perturbações é então descrita pela termo de segunda ordem. Com a fórmula da Hamiltoniana de segunda ordem e as relações derivadas ao longo do capítulo, chegamos na equação de forma razoavelmente simples (4.60), que descreve a evolução da perturbação do campo escalar no calibre escolhido.

Apesar de se tratar de um procedimento extenso, cada etapa do desenvolvimento até a chegada na equação final é bastante direta dado o método descrito no Capítulo 2. É notável como o uso do formalismo canônico foi o que tornou o estudo de um assunto tão complexo em algo intuitivo, ainda que trabalhoso. Para futuros trabalhos, planejamos adaptar o que foi visto no Capítulo 4 para universos fechados. Dentre as adaptações necessárias, teríamos antes de qualquer coisa a presença de um termo de curvatura no vínculo Hamiltoniano. Também nos vínculos, teríamos de tratar das derivadas covariantes usando símbolos de Christoffel. Além disso, teríamos de expandir as perturbações em harmônicos hipersféricos ao invés de ondas planas e a decomposição SVT no espaço de momentos também não teria a mesma forma. Obtidas as equações de movimento nos dois casos, podemos usar métodos numéricos para comparar os resultados, principalmente no que se refere ao regime pré-inflacionário.

Referências

- [1] Friedmann, Aleksander: *Über die Krümmung des Raumes*. Z. Phys. 10, p. 196–203, 1922. Citado na página 11.
- [2] Hubble, Edwin: *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*. Proc. Nat. Acad. Sci., 1929a, vol. 15, p. 168, 1929. Citado na página 11.
- [3] Arno A. Penzias, Robert W. Wilson: *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*. ApJ, vol. 142, p. 419, 1965. Citado na página 11.
- [4] Ralph A. Alpher, Robert C. Herman: *Evolution of the Universe*. Nature 162, p. 774–775, 1948. Citado na página 11.
- [5] Adam G. Riess, et al.: *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. Astron.J, 116, p. 1009-1038, 1998. Citado na página 11.
- [6] Sitter, Willem de: *On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis*. KNAW, Proceedings, 19 II, p. 1217-1225, 1917. Citado na página 11.
- [7] Guth, Alan H.: *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. Phys. Rev. D, vol. 23, p. 347-356, 1981. Citado na página 11.
- [8] *Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck*. A&A 641, A1, 2018. Citado na página 12.
- [9] Eleonora Di Valentino, Alessandro Melchiorri, Joseph Silk: *Planck evidence for a closed Universe and a possible crisis for cosmology*. Nature Astronomy 4, p. 196–203, 2019. Citado na página 12.
- [10] Ivan Agullo, Boris Bolliet e V. Sreenath: *Non-Gaussianity in loop quantum cosmology*. Phys. Rev. D 97, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 12, 48, 53, 57, 58 e 59.
- [11] Henneaux, Marc: *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 18, 22 e 46.
- [12] Bojowald, Martin: *Canonical Gravity and Its Applications: Cosmology, black holes, quantum gravity*. Cambridge University Press, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 23, 29, 33, 43 e 45.
- [13] Joshua Goldberg, Ezra T. Newman e Carlo Rovelli: *On Hamiltonian systems with first-class constraints*. J. Math. Phys. 32 (IO), 1991. Citado na página 23.

-
- [14] Wald, Robert M.: *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. Citado na página 29.
- [15] Domenico Giulini, Frederic Schuller: *Lecture 18: Canonical Formulation of GR I*. https://www.youtube.com/watch?v=s0iifkFYck4&ab_channel=TheWE-HeraeusInternationalWinterSchoolonGravityandLight, Fevereiro 2015. Citado na página 31.
- [16] Rayden, Barbara: *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2017. Citado na página 47.
- [17] Dodelson, Scott: *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 54, 55 e 56.

Apêndices

APÊNDICE A – Equação de Ricci

Neste apêndice iremos demonstrar a equação de Ricci. Considere a derivada de Lie de K_{ab} com relação a n^a :

$$\mathcal{L}_n K_{ab} = n^c \nabla_c K_{ab} + K_{ac} \nabla_b n^c + K_{bc} \nabla_a n^c.$$

Do primeiro termo do lado direito da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} n^c \nabla_c K_{ab} &= n^c \nabla_c (\nabla_a n_b + n_a n^d \nabla_d n_b) \\ &= n^c \nabla_c \nabla_a n_b + (n^c \nabla_c n_a) (n^d \nabla_d n_b) + n_a n^c \nabla_c (n^d \nabla_d n_b). \end{aligned}$$

Definindo a aceleração normal como $A_a := n^b \nabla_b n_a$, tal que $A_a n^a = 0$, podemos reescrever a última expressão da seguinte forma:

$$n^c \nabla_c K_{ab} = n^c \nabla_c \nabla_a n_b + A_a A_b + n_a n^c \nabla_c (n^d \nabla_d n_b).$$

Da definição de $q_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$, temos que $n_a n^c = -g_a^c + q_a^c$, o que resulta em

$$\begin{aligned} n^c \nabla_c K_{ab} &= n^c \nabla_c \nabla_a n_b + A_a A_b + (-g_a^c + q_a^c) \nabla_c (n^d \nabla_d n_b) \\ &= n^c \nabla_c \nabla_a n_b + A_a A_b - (\nabla_a n^d) (\nabla_d n_b) - n^d \nabla_a \nabla_d n_b + q_a^c \nabla_c (n^d \nabla_d n_b) \\ &= n^c \nabla_c \nabla_a n_b + A_a A_b - (\nabla_a n^d) (\nabla_d n_b) - n^d \nabla_a \nabla_d n_b + q_a^c \nabla_c A_b. \end{aligned}$$

Analisando o último termo separadamente, temos que

$$\begin{aligned} q_a^c \nabla_c A_b &= q_a^c g_b^e \nabla_c A_e \\ &= q_a^c (q_b^e - n_b n^e) \nabla_c A_e \\ &= q_a^c q_b^e \nabla_c A_e - q_a^c n_b n^e \nabla_c A_e \\ &= D_a A_b - q_a^c n_b n^e \nabla_c A_e. \end{aligned}$$

Como $A_a n^a = 0$, temos que $n^e \nabla_c A_e = -A_e \nabla_c n^e$ de forma que

$$\begin{aligned} q_a^c \nabla_c A_b &= D_a A_b + q_a^c n_b A_e \nabla_c n^e \\ &= D_a A_b + n_b A_e \nabla_a n^e + n_a n_b n^c A_e \nabla_c n^e, \end{aligned}$$

e finalmente obtemos para o primeiro termo de $\mathcal{L}_n K_{ab}$

$$\begin{aligned} n^c \nabla_c K_{ab} &= n^c (\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c) n_b + A_a A_b + D_a A_b - (\nabla_a n^d) (\nabla_d n_b) \\ &\quad + n_b A_e \nabla_a n^e + n_a n_b A_e (n^c \nabla_c n^e) \end{aligned}$$

Os demais termos da derivada de Lie são dados por

$$\begin{aligned} K_{ac}\nabla_b n^c + K_{bc}\nabla_a n^c &= (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + n_b n^c (\nabla_c n^d)(\nabla_a n_d) + K_{ac}(K_b^c - n_b n^d \nabla_d n^c) \\ &= (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + K_{ac}K_b^c - n_a n^d (\nabla_d n_c) n_b n^e \nabla_e n^d. \end{aligned}$$

Vários desses termos presentes na derivada de Lie se cancelam, pois

$$\begin{aligned} &(\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) - (\nabla_a n^d)(\nabla_d n_b) + n_b (\nabla_a n^e)(n^c \nabla_c n_e) \\ &= (\nabla_a n^c)(\nabla_b n_c - \nabla_c n_b + n_b n^d \nabla_d n_c) \\ &= (\nabla_a n^c)[q_b^d (\nabla_d n_c - \nabla_c n_d) + n_b n^d \nabla_d n_c] \\ &= (\nabla_a n^c)[q_b^d (\nabla_d n_c - \nabla_c n_d)] \\ &= (\nabla_a n^c)[q_b^d q_c^e (\nabla_d n_e - \nabla_e n_d) - q_b^d n_c n^e (\nabla_d n_e - \nabla_e n_d)] \\ &= (\nabla_a n^c)[(K_{bc} - K_{cb}) - n_c n^e \nabla_e n_b] \\ &= n_c (\nabla_a n^c) n^e \nabla_e n_b \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde em vários momentos usamos $n_a \nabla_b n^a = 0$, pois $n_a n^a = -1$.

Agrupando os termos restantes, reconhecendo que $R_{acbd}n^c n^d = n^c (\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n_b$ e isolando esse termo, chegamos à forma final da equação de Ricci

$$R_{acbd}n^c n^d = -\mathcal{L}_n K_{ab} + K_{ac}K_b^c + D_a A_b + A_a A_b \quad (\text{A.1})$$

APÊNDICE B – Cálculo das Séries Perturbativas dos Vínculos

Neste apêndice faremos em detalhe os cálculos dos termos das séries perturbativas dos vínculos \mathbb{S} e \mathbb{V}_i correspondentes às perturbações escalares, separando-os ordem a ordem. Por praticidade, repetiremos aqui as expressões dos vínculos (3.49) e (3.50):

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \frac{N\sqrt{q}}{2\kappa} {}^{(3)}R + \frac{1}{2\sqrt{q}} P_{\Phi}^2 \\ &+ \frac{\sqrt{q}}{2} D_i \Phi D^i \Phi + \sqrt{q} V(\Phi) \approx 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbb{V}_i = -2\sqrt{q} q_{ij} D_l \left(\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{q}} \right) + P_{\Phi} D_i \Phi \approx 0, \quad (\text{B.2})$$

O objetivo aqui é reescrever cada um dos vínculos como uma série perturbativa

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(\vec{x}) &= \mathbb{S}^{(0)} + \mathbb{S}^{(1)}(\vec{x}) + \mathbb{S}^{(2)}(\vec{x}) + \dots; \\ \mathbb{V}_i(\vec{x}) &= \mathbb{V}_i^{(0)} + \mathbb{V}_i^{(1)}(\vec{x}) + \mathbb{V}_i^{(2)}(\vec{x}) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

expandindo-as até segunda ordem. Para isso, escreveremos as variáveis canônicas na forma (4.4) em (B.1) e (B.2) e agruparemos os termos obtidos ordem a ordem. Por simplicidade, ao longo desse apêndice, iremos omitir a dependência em \vec{x} ao longo de muitas passagens, mas reforçamos aqui que essa dependência se dá sempre através das perturbações.

Os cálculos dos termos envolvendo $\delta\pi^{ij}$ são bastante trabalhosos e por isso cada etapa será descrita de forma mais minuciosa. Contudo, alguns termos são consideravelmente mais simples. Por exemplo, como estamos estudando o universo plano, o termo proporcional a ${}^{(3)}R$ em (B.1) é nulo. Além disso, pela escolha de calibre que fizemos, as perturbações escalares da métrica induzida são nulas. Isso nos permite usar

$$q_{ij} = a^2 \delta_{ij}$$

ao longo dos cálculos, já que estaremos lidando somente com perturbações escalares. Como consequência disso, temos também que

$$\sqrt{q} = a^3.$$

Dessa forma, o termo contendo P_{Φ} em (B.1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{q}} P_{\Phi}^2 &= \frac{1}{2a^3} (p_{\phi} + \delta p_{\phi})^2 \\ &= \frac{1}{2a^3} p_{\phi}^2 + \frac{1}{a^3} p_{\phi} \delta p_{\phi} + \frac{1}{2a^3} \delta p_{\phi}^2, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

sendo o primeiro de ordem zero, o segundo de primeira ordem e o terceiro de segunda ordem. Por isso, eles fazem parte de $\mathbb{S}^{(0)}$, $\mathbb{S}^{(1)}$ e $\mathbb{S}^{(2)}$ respectivamente.

Já o termo de \mathbb{S} contendo derivadas de Φ é puramente de segunda ordem. Como se trata de um campo escalar, temos que $D_i\Phi = \partial_i\Phi$ e como ϕ corresponde à parte homogênea do campo, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{q}}{2}D_i\Phi D^i\Phi &= \frac{a^3}{2}\partial_i(\phi + \delta\phi)\partial^i(\phi + \delta\phi) \\ &= \frac{a^3}{2}\partial_i\delta\phi\partial^i\delta\phi.\end{aligned}\tag{B.5}$$

No caso do termo contendo o potencial $V(\Phi)$, podemos fazer sua expansão em série de Taylor em torno de $\Phi = \phi$:

$$\sqrt{q}V(\Phi) = a^3 \left[V(\phi) + V'(\phi)\delta\phi + \frac{1}{2}V''(\phi)\delta\phi^2 + \dots \right],\tag{B.6}$$

onde $V'(\phi)$ e $V''(\phi)$ são respectivamente a primeira e segunda derivada de V com relação a Φ avaliadas em $\Phi = \phi$.

Por fim, temos os termos contendo o momento π^{ij} . Começamos separando $\pi^{ij}\pi_{ij}$ ordem a ordem e então calculamos cada um deles separadamente:

$$\begin{aligned}\pi^{ij}\pi_{ij} &= (\overset{\circ}{\pi}{}^{ij} + \delta\pi^{ij})(\overset{\circ}{\pi}{}_{ij} + \delta\pi_{ij}) \\ &= \overset{\circ}{\pi}{}^{ij}\overset{\circ}{\pi}{}_{ij} + 2\overset{\circ}{\pi}{}^{ij}\delta\pi_{ij} + \delta\pi^{ij}\delta\pi_{ij}.\end{aligned}\tag{B.7}$$

Usando (4.8), o primeiro termo fica

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\pi}{}^{ij}\overset{\circ}{\pi}{}_{ij} &= \overset{\circ}{\pi}{}^{ij}\overset{\circ}{\pi}{}^{lm}\overset{\circ}{q}{}_{li}\overset{\circ}{q}{}_{mj} \\ &= \left(\frac{\pi_a}{6a}\right)^2 a^4 \delta^{ij}\delta^{lm}\delta_{li}\delta_{mj} \\ &= \frac{\pi_a^2}{36} a^2 \delta^{ij}\delta_{ij} \\ &= \frac{\pi_a^2 a^2}{12}.\end{aligned}$$

Para calcular o segundo e o terceiro termo, precisaremos dos modos escalares da perturbação. Usando somente os modos escalares de (4.38), podemos escrever

$$\delta\tilde{\pi}{}^{ij}(\vec{k}) = \tilde{\pi}_1(\vec{k})A_{(1)}^{ij}(\vec{k}) + \tilde{\pi}_2(\vec{k})A_{(2)}^{ij}(\vec{k})\tag{B.8}$$

nos cálculos que seguem, onde

$$\begin{aligned}A_{(1)}^{ij} &= \frac{\hat{q}{}^{ij}}{\sqrt{3}} \\ A_{(2)}^{ij}(\vec{k}) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\hat{k}^i \hat{k}^j - \frac{\hat{q}{}^{ij}}{3} \right].\end{aligned}\tag{B.9}$$

Com isso, podemos começar o cálculo do termo de primeira ordem em (B.7) escrevendo a expansão em ondas planas explicitamente:

$$\begin{aligned}\mathring{\pi}^{ij}\delta\pi_{ij} &= \mathring{\pi}^{ij}\delta\pi^{lm}\mathring{q}_{li}\mathring{q}_{mj} \\ &= \frac{\pi_a}{6a}\delta^{ij}\left[\frac{1}{V_0}\sum_{\vec{k}}\delta\tilde{\pi}^{lm}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]\mathring{q}_{li}\mathring{q}_{mj}.\end{aligned}$$

Notando que

$$\delta^{ij}\mathring{q}_{li}\mathring{q}_{mj} = a^2\mathring{q}^{ij}\mathring{q}_{li}\mathring{q}_{mj} = a^2\mathring{q}_{lm},$$

podemos simplificar a expressão anterior:

$$\mathring{\pi}^{ij}\delta\pi_{ij} = \frac{a\pi_a}{6}\left[\frac{1}{V_0}\sum_{\vec{k}}\delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k})\mathring{q}_{ij}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right].$$

Uma consequência interessante da escolha de base que adotamos em (B.9) é que podemos escrever \mathring{q}_{ij} em termos de $A_{ij}^{(1)}$:

$$\mathring{q}_{ij} = \sqrt{3}A_{ij}^{(1)}.$$

Usando essa relação e a ortonormalidade dos elementos da base podemos mostrar que

$$\begin{aligned}\mathring{q}_{ij}\delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k}) &= \sqrt{3}A_{ij}^{(1)}[\tilde{\pi}_1(\vec{k})A_{(1)}^{ij}(\vec{k}) + \tilde{\pi}_2(\vec{k})A_{(2)}^{ij}(\vec{k})] \\ &= \sqrt{3}\tilde{\pi}_1(\vec{k}),\end{aligned}$$

o que nos permite chegar na expressão final para o termo de primeira ordem de (B.7)

$$\begin{aligned}\mathring{\pi}^{ij}\delta\pi_{ij} &= \frac{a\pi_a}{6}\left[\frac{1}{V_0}\sum_{\vec{k}}\sqrt{3}\tilde{\pi}_1(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \\ &= \frac{a\pi_a}{2\sqrt{3}}\pi_1,\end{aligned}$$

onde

$$\pi_1(\vec{x}) := \frac{1}{V_0}\sum_{\vec{k}}\tilde{\pi}_1(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (\text{B.10})$$

Um procedimento semelhante pode ser feito para o termo de segunda ordem. Começando pela expansão em série de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned}\delta\pi^{ij}\delta\pi_{ij} &= \left[\frac{1}{V_0}\sum_{\vec{k}}\delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]\left[\frac{1}{V_0}\sum_{\vec{k}'}\delta\tilde{\pi}_{ij}(\vec{k}')e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}}\right] \\ &= \frac{1}{V_0^2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k})\delta\tilde{\pi}_{ij}(\vec{k}')e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}.\end{aligned}$$

Novamente, reescrevemos as perturbações acima usando (B.8) para que possamos expressar o termo de segunda ordem em termos dos modos escalares:

$$\delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k})\delta\tilde{\pi}_{ij}(\vec{k}') = [\tilde{\pi}_1(\vec{k})A_{(1)}^{ij}(\vec{k}) + \tilde{\pi}_2(\vec{k})A_{(2)}^{ij}(\vec{k})][\tilde{\pi}_1(\vec{k}')A_{ij}^{(1)}(\vec{k}') + \tilde{\pi}_2(\vec{k}')A_{ij}^{(2)}(\vec{k}')].$$

Assim, obtemos quatro termos envolvendo tanto \vec{k} quanto \vec{k}' . Mas como $A_{ij}^{(1)} = \frac{\hat{q}_{ij}}{\sqrt{3}}$ não depende de \vec{k} , temos que $A_{ij}^{(1)}(\vec{k})A_{(1)}^{ij}(\vec{k}') = 1$ e $A_{ij}^{(1)}(\vec{k})A_{(2)}^{ij}(\vec{k}') = A_{ij}^{(2)}(\vec{k})A_{(1)}^{ij}(\vec{k}') = 0$, o que implica que

$$\delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k})\delta\tilde{\pi}_{ij}(\vec{k}') = \tilde{\pi}_1(\vec{k})\tilde{\pi}_1(\vec{k}') + \tilde{\pi}_2(\vec{k})\tilde{\pi}_2(\vec{k}')A_{ij}^{(2)}(\vec{k})A_{(2)}^{ij}(\vec{k}').$$

Precisamos agora avaliar o termo envolvendo $A_{ij}^{(2)}(\vec{k})A_{(2)}^{ij}(\vec{k}')$. Usando novamente (B.9), obtemos

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(2)}(\vec{k})A_{(2)}^{ij}(\vec{k}') &= \frac{3}{2} \left[\hat{k}^i \hat{k}^j - \frac{\hat{q}^{ij}}{3} \right] \left[\hat{k}'_i \hat{k}'_j - \frac{\hat{q}_{ij}}{3} \right] \\ &= \frac{3}{2} \hat{k}^i \hat{k}^j \left[\hat{k}'_i \hat{k}'_j - \frac{\hat{q}_{ij}}{3} \right], \end{aligned}$$

pois \hat{q}^{ij} é proporcional a $A_{ij}^{(1)}$. Logo,

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(2)}(\vec{k})A_{(2)}^{ij}(\vec{k}') &= \frac{3}{2} \left[\hat{k}^i \hat{k}^j \hat{k}'_i \hat{k}'_j - \frac{1}{3} \hat{k}^i \hat{k}_i \right] \\ &= \frac{3}{2} \hat{k}^i \hat{k}^j \hat{k}'_i \hat{k}'_j - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Usando esse resultado na expressão original para o termo de segunda ordem e separando novamente os somatórios de \vec{k} e \vec{k}'

$$\begin{aligned} \delta\pi^{ij}\delta\pi_{ij} &= \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \tilde{\pi}_1(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}'} \tilde{\pi}_1(\vec{k}') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \tilde{\pi}_2(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}'} \tilde{\pi}_2(\vec{k}') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \right] \\ &\quad + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \frac{k^i k^j}{k^l k_l} \tilde{\pi}_2(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}'} \frac{k'_i k'_j}{k'^m k'_m} \tilde{\pi}_2(\vec{k}') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \right], \end{aligned}$$

onde no último termo escrevemos explicitamente o produto dos vetores unitários como $\hat{k}^i \hat{k}^j = \frac{k^i k^j}{k^l k_l}$. Usando o fato de que

$$\partial_i \pi_2(\vec{x}) = \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} k_i \tilde{\pi}_2(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}},$$

e definindo

$$\partial_i^{-1} \pi_2(\vec{x}) := \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^i} \tilde{\pi}_2(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}},$$

podemos finalmente escrever o termo de segunda ordem como

$$\delta\pi^{ij}\delta\pi_{ij} = \pi_1^2 - \frac{1}{2}\pi_2^2 + \frac{3}{2}\partial^i\partial^j\partial^{-2}\pi_2\partial_i\partial_j\partial^{-2}\pi_2, \quad (\text{B.11})$$

onde $\partial^{-2}\pi_2 = \partial_l^{-1}\partial^{l-1}\pi_2$.

Agrupando os resultados, temos que

$$\pi^{ij}\pi_{ij} = \frac{\pi_a^2 a^2}{12} + \frac{a\pi_a}{2\sqrt{3}}\pi_1 + \pi_1^2 - \frac{1}{2}\pi_2^2 + \frac{3}{2}\partial^i\partial^j\partial^{-2}\pi_2\partial_i\partial_j\partial^{-2}\pi_2 \quad (\text{B.12})$$

Para finalizar o cálculo de \mathbb{S} , nos resta avaliar o termo contendo o traço do momento. Primeiramente, calculamos o traço:

$$\begin{aligned} \pi &= \dot{q}_{ij}\pi^{ij} \\ &= \dot{q}_{ij}(\overset{\circ}{\pi}^{ij} + \delta\pi^{ij}) \\ &= a^2\delta_{ij}\frac{\pi_a}{6a}\delta^{ij} + \frac{1}{V_0}\sum_{\vec{k}}\dot{q}_{ij}\delta\tilde{\pi}^{ij}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ &= \frac{a\pi_a}{2} + \sqrt{3}\pi_1. \end{aligned}$$

Usando esse resultado, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\pi_a^2}{4} + \sqrt{3}a\pi_a\pi_1 + 3\pi_1^2\right) \\ &= \frac{1}{8}a^2\pi_a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a\pi_a\pi_1 + \frac{3}{2}\pi_1^2. \end{aligned}$$

Por fim, podemos somar (B.12) a esse resultado para obter o termo que falta em \mathbb{S} :

$$\begin{aligned} \frac{2\kappa}{\sqrt{q}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right) &= -\frac{\kappa}{12a}\pi_a^2 \\ &\quad - \frac{\kappa}{\sqrt{3}a^2}\pi_a\pi_1 \\ &\quad - \frac{\kappa\pi_1^2}{a^3} - \frac{\kappa\pi_2^2}{a^3} + \frac{3\kappa}{a^3}\partial^i\partial^j\partial^{-2}\pi_2\partial_i\partial_j\partial^{-2}\pi_2. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Agrupando ordem a ordem os termos encontrados, conseguimos enfim encontrar os termos da série perturbativa de \mathbb{S} até segunda ordem:

$$\mathbb{S}^{(0)} = -\frac{\kappa}{12a}\pi_a^2 + \frac{1}{2a^3}p_\phi^2 + a^3V(\phi) \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbb{S}^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{\kappa}{\sqrt{3}a^2}\pi_a\pi_1(\vec{x}) + \frac{1}{a^3}p_\phi\delta p_\phi(\vec{x}) + a^3V'(\phi) \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{(2)}(\vec{x}) &= -\frac{\kappa\pi_1^2(\vec{x})}{a^3} - \frac{\kappa\pi_2^2(\vec{x})}{a^3} + \frac{1}{2a^3}\delta p_\phi^2(\vec{x}) \\ &\quad + \frac{a^3}{2}\partial_i\delta\phi(\vec{x})\partial^i\delta\phi(\vec{x}) + \frac{a^3}{2}V''(\phi) \\ &\quad + \frac{3\kappa}{a^3}\partial^i\partial^j\partial^{-2}\pi_2(\vec{x})\partial_i\partial_j\partial^{-2}\pi_2(\vec{x}) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

O procedimento para o vínculo de difeomorfismo é idêntico. Com base em argumentos apresentados ao longo do cálculo anterior, a expressão para \mathbb{V}_i pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_i &= -2\sqrt{q}q_{ij}D_l \left(\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{q}} \right) + P_\Phi D_i \Phi \\ &= -2\dot{q}_{ij}\partial_l \delta \pi^{jl} + p_\phi \partial_i \delta \phi + \delta p_\phi \partial_i \delta \phi.\end{aligned}$$

Precisamos agora avaliar o primeiro termo, que contém derivadas da perturbação do momento π^{ij} . Usando mais uma vez a expansão em ondas planas e a decomposição nos modos escalares, obtemos a expressão

$$\begin{aligned}\partial_l \delta \pi^{jl} &= \partial_l \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \delta \tilde{\pi}^{jl}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \\ &= \partial_l \left\{ \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} [\tilde{\pi}_1(\vec{k}) A_{(1)}^{ij}(\vec{k}) + \tilde{\pi}_2(\vec{k}) A_{(2)}^{ij}(\vec{k})] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}.\end{aligned}$$

Avaliando a primeira derivada, temos que

$$\begin{aligned}\partial_l \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \tilde{\pi}_1(\vec{k}) A_{(1)}^{ij}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] &= \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \frac{\dot{q}^{jl}}{\sqrt{3}} k_l \tilde{\pi}_1(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} k^j \tilde{\pi}_1(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \partial^j \pi_1.\end{aligned}$$

Avliando a segunda derivada, temos que

$$\begin{aligned}\partial_l \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \tilde{\pi}_1(\vec{k}) A_{(1)}^{ij}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} k_l \left(\hat{k}^l \hat{k}^j - \frac{\dot{q}^{jl}}{3} \right) \tilde{\pi}_2(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{k_l k^l}{k_m k^m} k^j - \frac{k^j}{3} \right) \tilde{\pi}_2(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \left(k^j - \frac{k^j}{3} \right) \tilde{\pi}_2(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\vec{k}} \frac{2k^j}{3} \tilde{\pi}_2(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \partial^j \pi_2.\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em \mathbb{V}_i , encontramos

$$\mathbb{V}_i(\vec{x}) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \partial_i \pi_1(\vec{x}) - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \partial_i \pi_2(\vec{x}) + p_\phi \partial_i \delta \phi(\vec{x}) + \delta p_\phi(\vec{x}) \partial_i \delta \phi(\vec{x}), \quad (\text{B.17})$$

de onde tiramos os termos da série perturbativa de \mathbb{V}_i :

$$\mathbb{V}_i^{(0)} = 0; \tag{B.18}$$

$$\mathbb{V}_i^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\partial_i\pi_1(\vec{x}) - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\partial_i\pi_2(\vec{x}) + p_\phi\partial_i\delta\phi(\vec{x}) \tag{B.19}$$

$$\mathbb{V}_i^{(2)}(\vec{x}) = \delta p_\phi(\vec{x})\partial_i\delta\phi(\vec{x}). \tag{B.20}$$