

Francisco Rosendo Martins de Andrade

**Efeitos aleatórios no sucesso: análise crítica do modelo  
Talent vs Luck**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Lucas Lages Wardil

Belo Horizonte

2021



# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais e a minha família, por todo o apoio, incentivo e amor.

Também quero agradecer à minha namorada, Alice, e a todos os meus amigos, por estarem comigo quando precisei.

Ao meu orientador, Lucas Wardil, por todos os ensinamentos, discussões frutíferas, pela paciência, e por ter compartilhado comigo seu entusiasmo.

A todos os professores do departamento de Física da UFMG, em especial àqueles que foram tão importantes para minha formação: Pablo Saldanha, Elmo Salomão, Ronald Dickman, Emmanuel Araújo, Carlos Henrique Monken, Jafferson Kamphorst, Simone Alexandre e Ricardo Wagner.

A todos os funcionários do ICEX, cujo trabalho é essencial para o bom funcionamento da instituição, e em especial à secretaria da pós-graduação de Física, pela disposição em ajudar sempre que precisei.

Por fim, porém não menos importante, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não teria sido possível.



# Resumo

Neste trabalho, será apresentado e discutido o modelo *Talent vs Luck* (TvL), que investiga o papel da sorte e do talento para o sucesso de um indivíduo dentro de uma sociedade. Os autores propõem uma dinâmica de evolução de capital (sinônimo de “sucesso”) baseada em eventos de sorte e de azar, na qual aqueles que passam por eventos de azar perdem capital, e os que passam por eventos de sorte têm chances de ganhar capital ou permanecer com a mesma quantia, dependendo do talento. Nessa dissertação, serão apontadas algumas inadequações do modelo, como, por exemplo, o fato dos autores não analisarem o efeito do número de iterações, que é um fator importantíssimo na análise do modelo. Tendo em vista tais inadequações, nós propusemos um modelo equivalente, definido em termos de um ensemble de passeios aleatórios, que nos permite uma análise mais rigorosa dos resultados. Por fim, apresentaremos algumas variações desse modelo.

**Palavras-chave:** Física estatística, passeios aleatórios, sucesso e sorte



# Abstract

In this work, we analyse the *Talent vs Luck* (TvL) model, which was proposed to investigate the roles of luck and talent in the success of individuals within a society. The authors propose a model of capital evolution (synonymous to “success”) based on lucky and unlucky events. Individuals that are subjected to unlucky events lose capital, while those that are subjected to lucky events may gain capital, depending on their talent. In this dissertation, some inadequacies of the model are pointed out, such as the fact that the authors do not analyze the effect of the number of iterations, which is a key factor in the analysis of the model. Given such problems, we have proposed an equivalent model, defined in terms of an ensemble of random walks, which allows us a more rigorous analysis of the results. Finally, we present some variations of this model.

**Keywords:** Random walks, success



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>EFEITOS ALEATÓRIOS NO SUCESSO</b>	<b>13</b>
2.1	Apresentação do artigo	13
2.2	Críticas ao artigo	19
<b>3</b>	<b>PASSEIOS ALEATÓRIOS</b>	<b>21</b>
3.1	Passeio aleatório simples 1D	22
3.2	Passeio geral	25
3.2.1	Passeio isotrópico em duas dimensões	26
3.2.2	Passeios em redes com invariância translacional	29
3.2.3	Transitividade e recorrência	31
<b>4</b>	<b>UMA RELEITURA DO MODELO TALENT VS LUCK</b>	<b>37</b>
4.1	O modelo TvL como $M$ passeios aleatórios independentes	37
4.1.1	Resultados	39
4.1.2	Discussão dos resultados	46
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	<b>47</b>
5.1	Conclusões	47
5.2	Perspectivas	48
5.2.1	Modelo com interação entre agentes	48
5.2.2	Probabilidades de eventos de sorte e de azar desequilibradas	49
5.2.3	Distribuição não uniforme de capital inicial e talento dependente de capital	50
5.2.4	Resultados preliminares	50
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>53</b>



# 1 Introdução

A desigualdade socioeconômica observada em 2017 era tal que os oito indivíduos mais ricos da população detinham 426 bilhões de dólares, o que na época equivalia à mesma quantidade que a riqueza coletiva da metade mais pobre da humanidade [1]. Entender de onde vem essa desigualdade é uma peça chave para encontrar a melhor estratégia para reverter essa situação, ou, no mínimo, diminuir o abismo. No entanto, a origem desse contexto é extremamente complexa, envolvendo séculos de bagagem histórica que nos trouxeram a esse ponto. A vastidão desse problema não pode, entretanto, servir de argumento para deixarmos de estudar individualmente alguns de seus elementos. Nesse trabalho, será apresentado um artigo publicado em 2018 por pesquisadores italianos, em que eles propõem que um fator importante para dinâmica da distribuição de riqueza é o paradigma meritocrático atual, e argumentam que o que vive-se hoje é uma “falsa meritocracia” [2].

O argumento “meritocrático” para explicar as diferenças socioeconômicas é que elas podem ser atribuídas às diferenças naturais de inteligência, habilidades, competências e dedicação entre os indivíduos da sociedade [3]. O conjunto dessas características será, ao longo deste trabalho, denominado de "talento", e terá um papel central no problema estudado. No entanto, a concentração de riquezas observada hoje é de uma ordem de grandeza que não pode ser explicada apenas pelos fatores citados acima.

Por um lado, existe um abismo entre os pouquíssimos mais ricos e a metade mais pobre da população. Por outro, estima-se que as distribuições de diversas características humanas, como altura e QI, seguem uma distribuição normal em torno de uma média. No caso do QI, uma média de aproximadamente 100, o que significa que muitas pessoas têm um QI próximo disso - entre 85 e 115 - mas ninguém tem um QI de 10000. Sob a hipótese de que o resto das habilidades e características que compõem o “talento” de um indivíduo seguem uma distribuição parecida, o argumento meritocrático para explicar as desigualdades sociais torna-se insustentável.

O artigo [2] propõe que o sucesso de um indivíduo é determinado não apenas por seu talento, mas também por fatores aleatórios, que representam um grande conjunto de elementos que estão fora do nosso controle e influenciam nos resultados das nossas decisões. No entanto, muitas vezes esses fatores agem de modo extremamente sutil em nossas vidas, quase imperceptível, de modo que é fácil construir narrativas em que o sucesso de um indivíduo é consequência inevitável de seu talento e esforço, enquanto na verdade ele é o resultado de uma sequência de passos extremamente complexa e sensível a mudanças. Como o analista de risco Nassim Nicholas Taleb explica em seu livro "The Black Swan" [4],

o ser humano tem dificuldade de observar uma sequência de fatos sem atribuir a eles uma explicação que os conecte, mesmo que seja preciso forçar uma relação lógica entre eles. Essa tendência torna esse tipo de narrativa falaz extremamente crível para o ser humano, e nos provê um falso entendimento da situação. Os psicólogos Neal J. Roese e Kathleen D. Vohs também abordam esse fenômeno em seu artigo "Hindsight Bias" [5], em que tentam mapear suas causas.

Apesar de abordar um conceito extremamente rico e de apresentar uma extensa argumentação, o artigo apresenta também alguns problemas, em especial no que diz respeito à modelagem e às conclusões tiradas dos resultados obtidos. A abordagem dos autores visa comparar o impacto do talento contra o da sorte na evolução do sucesso de um indivíduo numa sociedade, e o modelo proposto por eles tenta criar um contexto absolutamente isolado, em que não há interação entre os indivíduos. Essa ideia é perfeitamente razoável, visto que o problema é ainda incipiente, porém, como será explicitado na seção 2.2, o modelo proposto é desnecessariamente complexo. Isso acaba dificultando a percepção de que o número de passos de cada simulação influencia fundamentalmente os resultados do modelo, e, ao desconsiderar isso, os autores chegam em conclusões inadequadas sobre o problema.

Neste trabalho, será proposta uma reformulação do modelo TvL, que tenta explicitar e contornar os problemas apresentados acima e servir de plataforma para diversas expansões bastante naturais das ideias fundamentais sobre o problema.

## 2 Efeitos aleatórios no sucesso

### 2.1 Apresentação do artigo

Em 2018, pesquisadores italianos publicaram um artigo intitulado “Talent vs Luck: the role of randomness in success and failure” (Talent vs sorte: o papel da aleatoriedade no sucesso e no fracasso) [2], em que eles tentam avaliar o impacto de eventos aleatórios no sucesso de um indivíduo. Em seu trabalho, o sucesso de um indivíduo é definido pelo seu capital, o que é uma conjectura bastante razoável, dada a estrutura social em que vivemos, na qual o capital de um indivíduo influencia fortemente na sua posição social. Tendo isso em vista, como podemos explicar o surgimento das drásticas diferenças de sucesso observadas hoje?

Os autores propõem um modelo mínimo, ao qual dão o nome de “Talent vs Luck” (TvL, talento vs sorte), para quantificar o impacto de fatores aleatórios no sucesso individual. Nesse modelo,  $N = 1000$  indivíduos são fixados aleatoriamente numa rede quadrada com condições de contorno periódicas, e a cada um deles é associado um valor  $T_i$  dentro do intervalo  $[0, 1]$ , chamado de talento. O talento de cada indivíduo representa uma medida do conjunto de todas as suas habilidades, conhecimentos e dedicação, ou, como ficará claro posteriormente, a aptidão de um indivíduo para transformar uma oportunidade em capital.

A ideia dos autores é disputar a noção aparentemente meritocrática de que as desigualdades sociais são fruto das diferenças de talento entre seus indivíduos. Sabe-se que a distribuição de riquezas hoje segue, aproximadamente, uma lei de potência [6], com uma pequena porcentagem de indivíduos acumulando a maior parte da riqueza, o que é refletido pela longa “cauda” que seu gráfico apresenta.

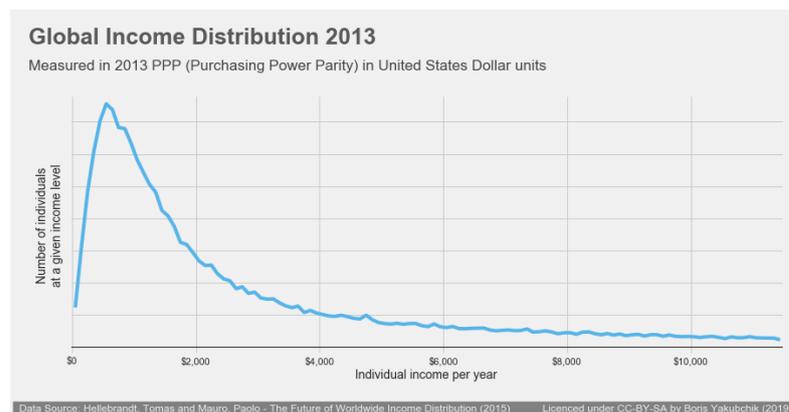


Figura 1 – Distribuição de riqueza global em 2013

Em termos de características humanas, por outro lado, as diferenças são bem menos drásticas. Em sua maior parte, essas características, como QI e altura, apresentam uma distribuição normal, uma gaussiana em torno de uma média. Se considerarmos que as características que compõem o talento também seguem uma distribuição normal, é impossível explicar a enorme concentração de riquezas como proveniente apenas das diferenças de talento entre indivíduos.

Portanto, a distribuição de talento no modelo TvL segue uma gaussiana, de média  $m_T = 0.6$  e desvio padrão  $\sigma_T = 0.1$ , conforme ilustrado na Fig. 2. Os eventos de sorte e azar são introduzidos como partículas verdes e vermelhas, respectivamente, que caminham aleatoriamente na rede. Existem  $N_E = 500$  eventos, divididos igualmente entre eventos de sorte e de azar. A estrutura do modelo é ilustrada na Fig. 3.

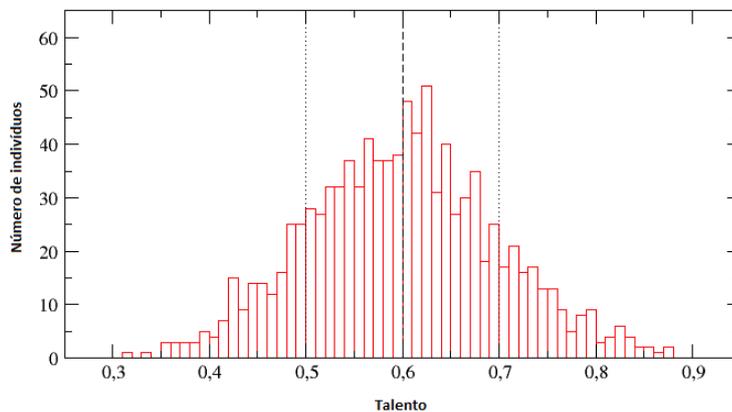


Figura 2 – Distribuição de talento na sociedade. A média  $m_T = 0.6$  está indicada pela linha tracejada, enquanto os valores  $T = m_T \pm \sigma_T$  estão indicados pelas linhas pontilhadas

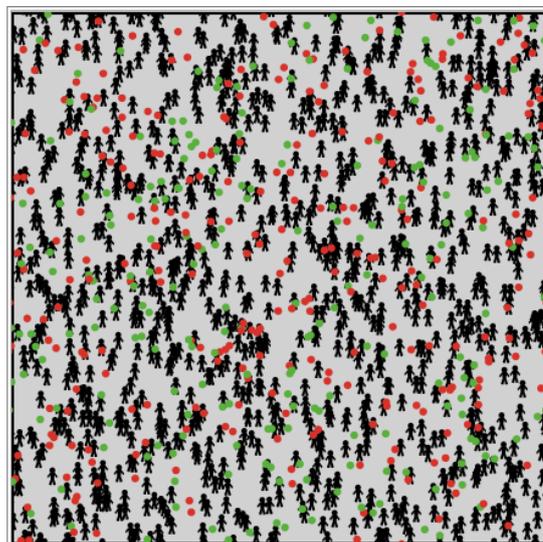


Figura 3 – Simulação do modelo TvL. Os eventos de sorte são representados pelos círculos verdes, enquanto os eventos de azar são representados pelos círculos vermelhos

Uma simulação visa abranger um período ativo de trabalho de 40 anos, com um passo de tempo  $\delta_t$  de seis meses, de modo que são feitas 80 iterações. Além disso, cada indivíduo  $k$  começa com uma quantidade de capital  $c_k(0) = 10$ , que evoluirá segundo a seguinte dinâmica:

1. Se, no tempo  $t$ , houver algum evento de **azar** dentro de um círculo de raio equivalente a uma unidade da rede quadrada centrado em algum agente  $k$ , tal agente tem seu capital cortado pela metade.

$$c_k(t+1) = \frac{c_k(t)}{2}$$

2. Se, no tempo  $t$ , houver algum evento de **sorte** dentro de um círculo de raio equivalente a uma unidade da rede quadrada centrado em algum agente  $k$  de talento  $T_k$ , então:
  - com probabilidade  $T_k$ , tal agente dobra seu capital
  - com probabilidade  $1 - T_k$ , seu capital não se altera
3. Se não houver nenhum evento dentro de um círculo unitário centrado em algum agente  $k$ , seu capital não se altera

Os resultados da simulação são mostrados na figura 4. Vê-se que pouquíssimos indivíduos são muito ricos e a maior parte da população termina com capital final menor que 10 unidades. No entanto, o resultado mais importante de acordo com os autores é representado na figura 5, que mostra o capital final de cada indivíduo em função de seu talento após uma única realização da simulação, isto é, uma única amostra do ensemble. Podemos observar que o indivíduo com maior capital possui um talento próximo da média de 0.6, o que parece contraintuitivo, já que indivíduos com maior talento teriam mais chances de aumentar seu capital.

As figuras 5 e 6, no entanto, representam apenas os resultados de uma única realização do processo, portanto não é possível tirar nenhuma conclusão desses resultados sozinhos. Por esse motivo, os autores também analisaram histogramas do indivíduo mais bem sucedido ao longo de 100 e 10000 simulações, como mostrado nas figuras 7a e 7b. A figura 7b mostra que a distribuição de probabilidade do indivíduo mais bem sucedido tem forma similar à da distribuição de talento entre a população (média  $m_t = 0.6$ ), porém é deslocada levemente para a direita (média  $T_{avg} = 0.667$ ). Isso nos mostra que o fato de o indivíduo mais bem sucedido na figura 5 ter sido um de talento mediano não é uma coincidência, e sim uma tendência desse sistema. Em outras palavras, a probabilidade de encontrar, entre os mais bem sucedidos, um indivíduo com talento no intervalo  $[T, T + dT]$  aumenta com  $T$  até chegar num máximo em  $T_{avg} = 0.667$  e depois decresce quando  $T > T_{avg}$ . Por fim, os autores concluem:

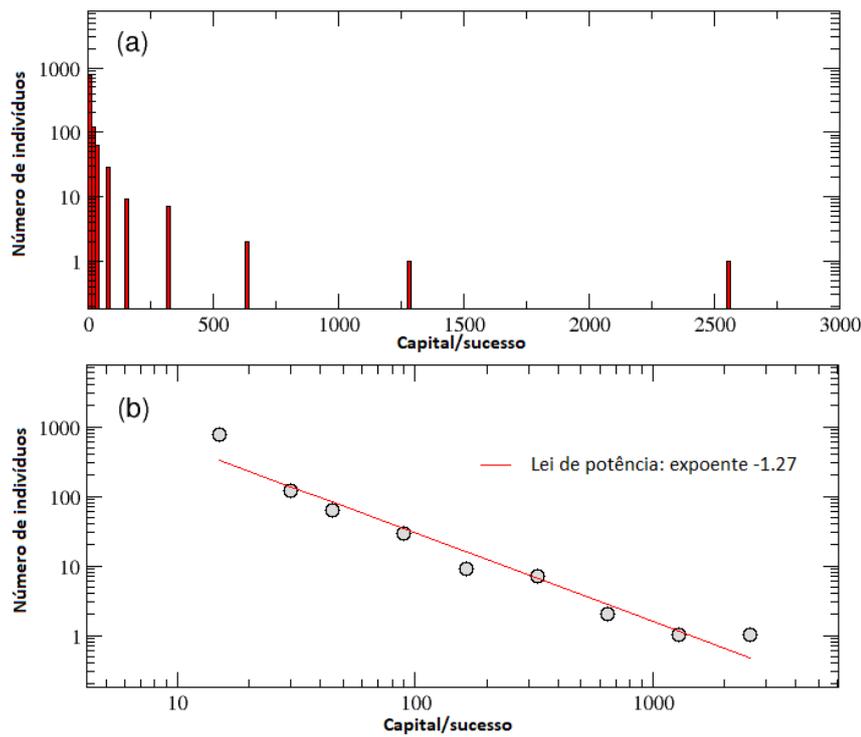


Figura 4 – Distribuição final de capital. Em (a), a escala é log-lin e em (b), log-log.

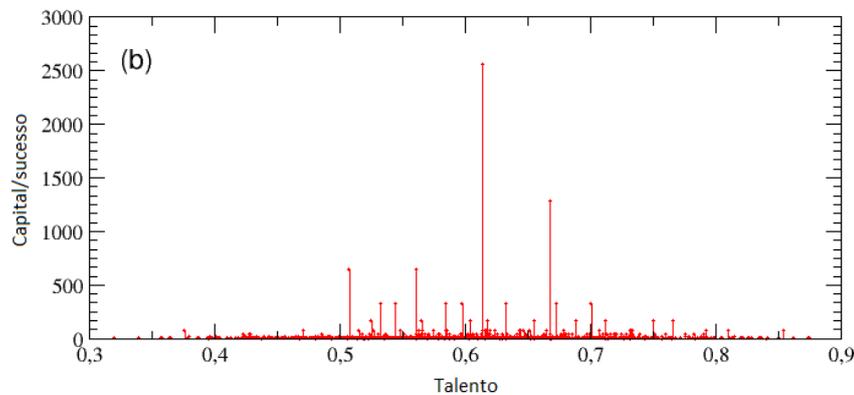


Figura 5 – Capital final de cada indivíduo em função de seu talento

*It is evident that, on one hand, the most successful individuals are not the most talented ones and, on the other hand, the most talented individuals are not the most successful ones...*

*... Therefore, we can conclude that the observed Gaussian shape of  $P(C_{max}|T)$  is the proof that luck matters more than talent in reaching very high levels of success.*

A partir desses resultados, os autores argumentam que seu modelo desafia a maior parte dos mecanismos de atribuição de recompensas presentes hoje em nossa sociedade,

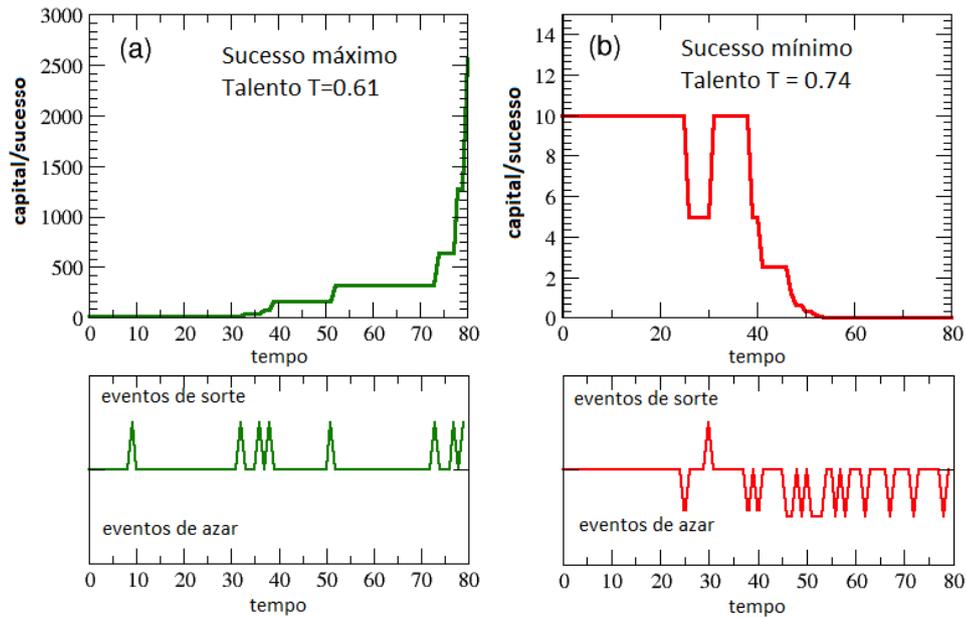
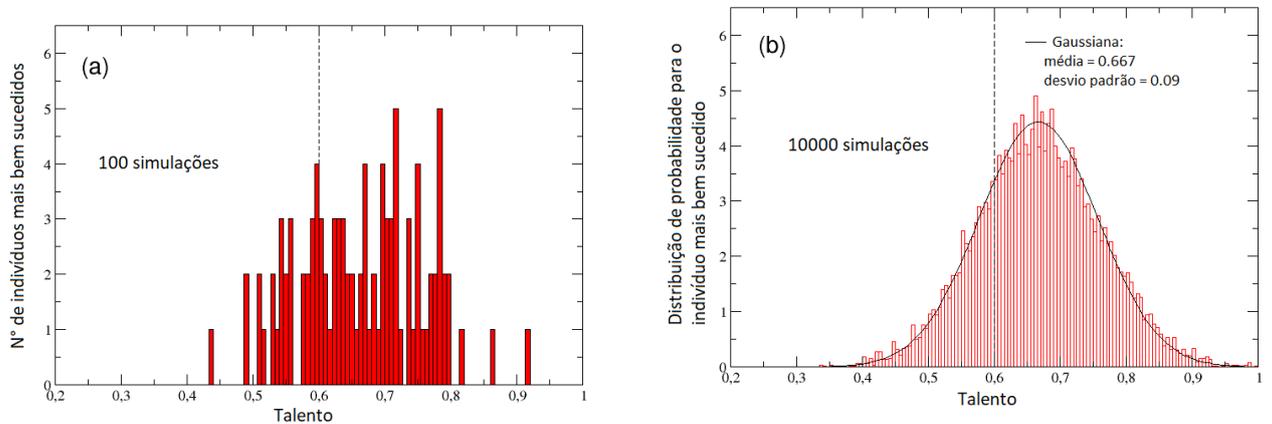


Figura 6 – Evolução temporal do capital dos indivíduos mais bem sucedido (a) e menos bem sucedido (b). A sequência de eventos ocorridos ao longo da vida de cada um deles também é mostrada, com eventos de sorte representados por picos para cima, e eventos de azar representados por picos para baixo.



(a) Distribuição de talento dos indivíduos mais bem sucedidos em 100 simulações (b) Distribuição de probabilidade do talento do indivíduo mais bem sucedido, calculada ao longo de 10000 simulações

Figura 7

baseados num paradigma falsamente meritocrático. De modo geral, a estratégia vigente atribui recompensas maiores àqueles considerados os melhores em suas áreas, ou, na linguagem do modelo, aos mais bem sucedidos. No entanto, os indivíduos mais bem sucedidos não são necessariamente os mais talentosos, e seu sucesso pode ter se dado por uma sequência excepcional de eventos de sorte, como demonstrado na figura 6.

Por fim, o artigo apresenta algumas estratégias para contra-balancear o impacto da aleatoriedade e estimular o crescimento, em especial, dos indivíduos mais talentosos, e utilizam como exemplo a distribuição de verbas para pesquisa entre um conjunto de pesquisadores. Os autores comparam diversas estratégias de distribuição de uma quantidade total  $F_T$  de verbas ao longo de uma simulação do modelo TvL:

1. distribuição uniforme da verba para todos os pesquisadores, afim de estimular a diversificação (critério igualitário)
2. distribuição de toda a verba apenas para uma porcentagem dos indivíduos mais bem sucedidos (critério elitista), que representa o tipo de estratégia geralmente adotada atualmente
3. distribuição de uma parte do fundo para uma porcentagem dos mais bem sucedidos, e o resto dividido igualmente entre os outros pesquisadores (critério misto)
4. apenas para uma porcentagem de indivíduos, escolhidos aleatoriamente (seleção aleatória)

Na tabela a seguir, são mostrados os resultados das diversas estratégias de distribuição de verbas, baseados nas seguintes quantidades:

- $F_T$ : verba total distribuída
- $P_T$ : porcentagem de indivíduos talentosos que foram bem sucedidos, ou seja, terminaram com sucesso maior que o inicial
- $P_{T0}$ :  $P_T$  para o caso em que  $F_T = 0$ , ou seja, em que não há distribuição de verbas (modelo TvL padrão)
- $P_T^* = P_T - P_{T0}$
- $E = \frac{P_T^*}{F_T}$ : fator de eficiência da estratégia
- $E_{norm} = \frac{E}{E_{max}}$ : fator de eficiência normalizado

FUNDING-TARGET	$E_{nom}$	$P_T$	$P^*_T = P_T - P_{T0}$	$F_T$
ALL EQUAL	1,00	98,14	67,68	80000
50% RANDOM	0,98	97,12	66,66	80000
HALF 25% BEST, HALF TO OTHERS	0,97	96,13	65,67	80000
25% RANDOM	0,85	87,67	57,21	80000
10% RANDOM	0,54	66,73	36,27	80000
50% BEST	0,45	61,19	30,73	80000
25% BEST	0,22	45,31	14,85	80000
10% BEST	0,06	34,83	4,37	80000
NO FUNDING	0,00	30,46	0,00	0

Figura 8 – A estratégia elitista (2) apresenta os piores fatores de eficiência, enquanto a estratégia igualitária (1) apresenta o maior deles

## 2.2 Críticas ao artigo

A proposta fundamental dos autores é avaliar a importância da aleatoriedade contra a do talento na evolução do sucesso de um indivíduo. Como uma primeira abordagem do problema, o modelo TvL proposto por eles apresenta um conjunto mínimo e generalista de hipóteses, o que é natural, dada a complexidade do problema a ser estudado. As principais hipóteses sobre as quais o modelo é construído são:

1. Sejam A e B indivíduos na sociedade, com talentos  $T_A$  e  $T_B$ , respectivamente. Então, se  $T_A > T_B$ , o indivíduo A tem maior probabilidade de ser bem sucedido que o indivíduo B
2. Eventos de sorte não podem diminuir o capital de nenhum indivíduo, assim como eventos de azar não podem aumentar o capital de nenhum indivíduo
3. O talento na população segue uma distribuição aproximadamente normal

As duas primeiras hipóteses são bastante intuitivas, a primeira representando a ideia de que pessoas mais inteligentes, esforçadas e habilidosas devem possuir uma chance maior de se tornarem bem sucedidas; e a segunda servindo como base para a definição do que são eventos de sorte e de azar. O último item é o fundamento para a crítica ao argumento de que as desigualdades sociais são provenientes apenas de diferenças de talento entre os membros de uma sociedade. No entanto, existem alguns aspectos do modelo aos quais não foi dada atenção adequada, e que podem ser críticos para as conclusões obtidas.

O primeiro desses aspectos é o uso de uma rede quadrada com indivíduos fixos em posições aleatórias e com eventos de sorte e de azar representados por “bolinhas” que realizam passeios aleatórios nela. Como não há nenhum tipo de interação entre os indivíduos, o único motivo para associá-los a uma estrutura espacial é o mecanismo de eventos, o passeio aleatório das “bolinhas”. No entanto, como as “bolinhas” realizam

passeios aleatórios não enviesados e a rede é finita, dada uma quantidade de bolinhas, isso equivale a atribuir uma probabilidade de ocorrer um evento de cada tipo (sorte, azar ou neutro) a cada agente, e assim nos livramos de qualquer necessidade de uma estrutura espacial. Além disso, com essa reformulação do problema, alguns parâmetros importantes tornam-se mais explícitos, como a probabilidade  $d$  de um agente não passar por nenhum evento, que, em termos do modelo TvL, está relacionada com a densidade de “bolinhas” na rede.

O segundo aspecto, e talvez o mais importante, é que as conclusões em que os autores chegam não levam em consideração um fator extremamente importante: o número de iterações de cada simulação. Fundamentalmente, o que as conclusões do artigo ignoram é que, na média, todos os agentes perdem capital ao longo do tempo, uma tendência que fica bem mais clara quando o modelo é reformulado como um conjunto de passeios aleatórios independentes, no capítulo 4. Em resumo, quando o número de iterações aumenta, o papel do talento torna-se mais importante, por que indivíduos mais talentosos perdem capital numa taxa mais lenta, o que é discutido em detalhes também no capítulo 4. Tendo isso em vista, a principal crítica ao artigo é que os autores não apresentam uma motivação convincente para usar um passo de tempo  $\delta_t$  de seis meses, o que leva a um total de 80 iterações.

Nesse modelo, e em diversos outros processos estocásticos, é possível notar uma dualidade de argumentos relacionados à pergunta fundamental do problema, que é o quão importante é o talento de um indivíduo para a evolução de seu sucesso. De um lado, comparando um indivíduo A de talento alto com um indivíduo B de talento médio ( $T_A > T_B$ ), é claro que o indivíduo A tem mais chances de se tornar mais bem sucedido, já que ele tem mais chances de transformar oportunidades em capital. Por outro lado, se compararmos o conjunto de indivíduos de talento alto  $C_H$  com o conjunto de indivíduos de talento médio  $C_M$ , é natural que haja algum indivíduo de  $C_M$  com sucesso maior que a média ou até que o máximo de  $C_H$ , porque existem muito mais elementos em  $C_M$  do que em  $C_H$ , o que significa que haverá mais flutuações (sequências excepcionais de eventos de sorte ou de azar) em  $C_M$ . Isso pode ser motivo de confusão para o leitor não acostumado, mas não há contradição entre os argumentos, eles simplesmente se aplicam em situações diferentes.

De qualquer forma, independente das críticas, o artigo deixa uma mensagem. Numa população onde a maioria das pessoas é normal, isto é, possui talento mediano, pode ser que alguns dos indivíduos de grande sucesso que tanto se idolatra sejam indivíduos de talento mediano, cujo sucesso foi decorrente de uma sequência favorável de eventos aleatórios de sorte. Além disso, os autores mostram como essa avaliação inadequada do sucesso pode gerar um mecanismo falsamente meritocrático de atribuição de recompensas.

### 3 Passeios aleatórios

O leitor já acostumado ao estudo de passeios aleatórios verá claramente que o modelo Talent vs Luck apresentado no capítulo anterior é essencialmente um passeio aleatório nos números inteiros. Portanto, antes da releitura do modelo em termos de um passeio aleatório, será feita uma revisão do assunto baseada no volume 1 da série “Random walks and random environments” [7], em que serão apresentados e discutidos alguns conceitos chave.

O termo passeio aleatório foi introduzido numa carta do estatístico Karl Pearson à revista Nature em 27 de julho de 1905:

The problem of the random walk

*Can any of your readers refer me to a work wherein I should find a solution of the following problem, or failing the knowledge of any existing solution provide me with an original one? I should be extremely grateful for aid in the matter.*

*A man starts from a point  $O$  and walks  $l$  yards in a straight line; he then turns through any angle whatever and walks another  $l$  yards in a second straight line. He repeats this process  $n$  times. I require the probability that after  $n$  of these stretches he is at a distance between  $r$  and  $r + \delta r$  from his starting point,  $O$ .*

*The problem is one of considerable interest, but I have only succeeded in obtaining an integrated solution for two stretches. I think, however, that a solution ought to be found, if only in the form of a series of powers of  $r/n$ , when  $n$  is large.*

KARL PEARSON.

Karl Person estava interessando no problema de migrações aleatórias, em particular a de mosquitos para clareiras em florestas (Pearson, 1906) [8]. Em 1919, o físico John William Strutt, mais conhecido como Lord Rayleigh, expandiu as análises de Pearson ao desenvolver o análogo em três dimensões do passeio aleatório, chamado de *voo aleatório*, que possuía semelhanças com o estudo do movimento de partículas coloidais realizado por Smoluchowski (Smoluchowski, 1906) [9].

A nossa releitura do modelo será baseada, essencialmente, no passeio simples em uma dimensão. Porém, como explicitado no capítulo 5, o uso de uma rede quadrada é uma extensão bastante natural para o modelo, portanto serão estudados também passeios aleatórios em redes, como base para trabalhos futuros. Na próxima sessão, será revisada

a solução do passeio aleatório em uma dimensão e, na seguinte, a de passeios aleatórios bidimensionais e em redes.

### 3.1 Passeio aleatório simples 1D

Suponhamos que um caminhante está restrito a andar numa linha reta infinita, e a cada intervalo de tempo fixo  $\Delta t$ , ele dá um passo de tamanho fixo  $\Delta x$  para a esquerda ou para a direita, o sentido escolhido aleatoriamente. Como os passos são sempre do mesmo tamanho, as únicas posições possíveis para o caminhante são múltiplos inteiros de  $\Delta x$ , portanto é possível associar as posições ao conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$ . Já que a reta em que ele anda é infinita, a posição em que o passeio começa não importa, e escolheremos o ponto inicial 0.

Suponhamos ainda que, a cada intervalo  $\Delta t$ , a probabilidade de andar para a direita seja a mesma, ou seja, a chance de andar para a direita não muda de acordo com o número de passos dados. Seja  $p$  a probabilidade de andar para a direita e  $q = 1 - p$  a probabilidade de andar para a esquerda. A pergunta que queremos responder é: **qual é a probabilidade  $p(m, N)$  de o caminhante estar na posição  $m$  após  $N$  passos?**

Denotemos o número de passos para a direita por  $n_1$  e o número de passos para a esquerda por  $n_2$ . Para chegar na posição  $m$ , considerando o passeio nos números inteiros, é preciso que a diferença entre o número de passos seja exatamente  $m$ , já que um passo para a esquerda anula a distância percorrida por um passo para a direita. Então temos:

$$n_1 + n_2 = N$$

$$n_1 - n_2 = m$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{2}(N + m) \\ n_2 &= \frac{1}{2}(N - m) \end{aligned}$$

Todas as sequências de passos com  $n_1$  passos para a direita e  $n_2$  passos para a esquerda terminarão na posição  $m$ , independente da ordem em que os passos foram dados. A probabilidade de uma sequência de passos para a esquerda e para a direita é o produto das probabilidades de cada passo, ou seja, depende apenas do número de passos em cada sentido. Portanto, todas as sequências de  $N$  passos que levam à posição  $m$  têm a mesma probabilidade, já que possuem necessariamente a mesma quantidade de passos para a esquerda e para a direita. Então, a probabilidade de um dos caminhos até  $m$  com  $N$  passos é:

$$p^{n_1} q^{n_2} = p^{\frac{1}{2}(N+m)} q^{\frac{1}{2}(N-m)} \quad (3.1)$$

Para computar a probabilidade total de o caminhante chegar à posição  $m$  em  $N$  passos, devemos multiplicar a equação 3.1 pelo número de possíveis sequências com  $n_1$  passos para a direita e  $n_2$  passos para a esquerda.

A quantidade de sequências de  $N$  passos totais e  $n_1$  passos para a direita equivale ao número de jeitos distintos de selecionar  $n_1$  objetos de um conjunto de  $N$  objetos. Essa quantidade é dada, segundo análise combinatória, pelo binômio de Newton:

$$\binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} = \frac{N!}{n_1!n_2!}$$

Portanto, a probabilidade total de o caminhante chegar à posição  $m$  em  $N$  passos é dada por:

$$p(m, N) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)!\left(\frac{N-m}{2}\right)!} p^{\frac{1}{2}(N+m)} q^{\frac{1}{2}(N-m)} \quad (3.2)$$

Reescrevendo a equação 3.2 apenas em termos do número total de passos  $N$  e o número de passos para a direita  $n_1$ , obtemos a distribuição de probabilidade do número de passos para a direita num passeio de  $N$  passos:

$$p(m, N) = p_N(n_1) = \binom{N}{n_1} p^{n_1} q^{N-n_1} \quad (3.3)$$

A partir dessa expressão, é possível calcular todos os momentos da distribuição, usando uma identidade decorrente do teorema binomial:

$$(pu + q)^N = \sum_{n_1=0}^N \binom{N}{n_1} u^{n_1} p^{n_1} q^{N-n_1} \quad (3.4)$$

Notemos que  $p_N(n_1)$  é o coeficiente de  $u^{n_1}$  no somatório, ou seja,

$$\sum_{n_1=0}^N p_N(n_1) = [(pu + q)^N]_{u=1} = (p + q)^N = 1. \quad (3.5)$$

O  $j$ -ésimo momento de uma distribuição de probabilidade (discreta)  $p(n)$  é dado por:

$$\mu_j = \sum_n n^j p(n) \quad (3.6)$$

No nosso caso,  $p(n) = p_N(n_1)$ :

$$\mu_j = \sum_{n_1=0}^{\infty} n_1^j p_N(n_1) = \sum_{n_1=0}^{\infty} n_1^j \left[ \binom{N}{n_1} u^{n_1} p^{n_1} q^{N-n_1} \right]_{u=1} \quad (3.7)$$

Notemos que

$$\left[ u \frac{d}{du} \right] u^{n_1} = (u) n_1 u^{n_1-1} = n_1 u^{n_1}, \quad (3.8)$$

e

$$\left[ u \frac{d}{du} \right]^j u^{n_1} = n_1 \left[ u \frac{d}{du} \right]^{j-1} u^{n_1} = \dots = n_1^j u^{n_1}. \quad (3.9)$$

Portanto, o  $j$ -ésimo momento pode ser expresso como:

$$\mu_j = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[ \left( u \frac{d}{du} \right)^j \left( \binom{N}{n_1} u^{n_1} p^{n_1} q^{N-n_1} \right) \right]_{u=1} \quad (3.10)$$

Como o somatório é em  $n_1$  e a derivada é em relação a  $u$ , podemos trocar a ordem:

$$\mu_j = \left[ \left( u \frac{d}{du} \right)^j \left( \sum_{n_1=0}^{\infty} \binom{N}{n_1} u^{n_1} p^{n_1} q^{N-n_1} \right) \right]_{u=1} \quad (3.11)$$

Agora, usando a equação 3.4, obtemos uma expressão geral:

$$\mu_j = \left[ \left( u \frac{d}{du} \right)^j ((pu + q)^N) \right]_{u=1} \quad (3.12)$$

O primeiro momento da distribuição, ou o valor esperado do número de passos para a direita, será

$$\mu_1 = \left[ (u) N (pu + q)^{N-1} p \right]_{u=1} = Np(p + q)^{N-1} = Np \quad (3.13)$$

Analogamente, podemos mostrar que o segundo momento é dado por:

$$\mu_2 = Npq + N^2 p^2 \quad (3.14)$$

Por fim, a variância  $\sigma^2$  da distribuição é dada por:

$$\sigma^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = Npq \quad (3.15)$$

O método exposto acima funciona muito bem para o passeio aleatório simples em uma dimensão, em que as probabilidades de andar para a esquerda ou para a direita não dependem da posição do andarilho e o tamanho do passo é constante. Será possível generalizar esse método para passeios mais complexos e em espaços de dimensão maior que um? Na próxima sessão, discutiremos como analisar esse problema usando a transformada de Fourier.

## 3.2 Passeio geral

Consideremos um caso mais geral, em que o passeio se dá em  $\mathbb{R}^d$ , mas considerando ainda o tempo discreto. Além disso, agora o andarilho pode dar passos em qualquer direção e de qualquer tamanho (desde que finitos), e a probabilidade do tamanho e da direção dos passos pode mudar de acordo com o ponto do espaço em que ele se encontra. Seja  $P_n(\mathbf{r})$  a densidade de probabilidade do andarilho estar na posição  $r$  após  $n$  passos; e  $p_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  a probabilidade de, no  $n$ -ésimo passo, o andarilho se deslocar de  $\mathbf{r}'$  para  $\mathbf{r}$ . Mais especificamente, a probabilidade de ele estar dentro de um volume infinitesimal  $\delta V$  centrado em  $\mathbf{r}$  após  $n$  passos é  $P_n(\mathbf{r})\delta V$ . Então, o movimento do passeio é descrito pela equação:

$$P_{n+1}(\mathbf{r}) = \int p_{n+1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')P_n(\mathbf{r}')d^d\mathbf{r}' \quad (3.16)$$

A solução geral da Eq. 3.16 pode ser bastante complicada, mas existe uma restrição que a coloca numa forma bastante mais fácil de analisar. Se assumirmos que  $p_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  na verdade é função apenas de  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , ou seja, se a probabilidade de o andarilho se deslocar do ponto  $\mathbf{r}'$  para o ponto  $\mathbf{r}$  depender apenas da distância relativa entre os dois pontos, a equação 3.16 toma a forma:

$$P_{n+1}(\mathbf{r}) = \int p_{n+1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')P_n(\mathbf{r}')d^d\mathbf{r}'. \quad (3.17)$$

Com essa simplificação, é possível analisar o problema utilizando a transformada de Fourier, já que a equação está posta na forma de um produto de convolução. Tomando a transformada de Fourier de 3.17, obtemos

$$\tilde{P}_{n+1}(\mathbf{q}) = \tilde{p}_{n+1}(\mathbf{q})\tilde{P}_n(\mathbf{q}). \quad (3.18)$$

Começando em  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(\mathbf{q}) &= \tilde{p}_1(\mathbf{q})\tilde{P}_0(\mathbf{q}) \\ \tilde{P}_2(\mathbf{q}) &= \tilde{p}_2(\mathbf{q})\tilde{P}_1(\mathbf{q}) \\ &= \tilde{p}_2(\mathbf{q})\tilde{p}_1(\mathbf{q})\tilde{P}_0(\mathbf{q}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto:

$$\tilde{P}_n(\mathbf{q}) = \tilde{P}_0(\mathbf{q}) \prod_{j=1}^n \tilde{p}_j(\mathbf{q}) \quad (3.19)$$

Tomando agora a transformada inversa, obtemos uma solução formal para o problema:

$$P_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{P}_0(\mathbf{q}) \prod_{j=1}^n \tilde{p}_j(\mathbf{q}) d^d \mathbf{q} \quad (3.20)$$

Obtivemos, então, uma solução formal para a probabilidade de o andarilho estar na posição  $\mathbf{r}$  após  $n$  passos. Apesar de ser uma expressão relativamente complexa, existem duas hipóteses que simplificam bastante a solução de 3.20 e não restringem tanto sua aplicabilidade:

1. Se o passeio começa da origem, o termo  $\tilde{P}_0(\mathbf{q})$  se transforma numa constante:

$$P_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \Rightarrow \tilde{P}_0(\mathbf{q}) = 1$$

2. Se o tamanho de todos os passos for descrito pela mesma distribuição de probabilidade:

$$\tilde{p}_j(\mathbf{q}) = \tilde{p}(\mathbf{q}) \quad \forall j \Rightarrow \prod_{j=1}^n \tilde{p}_j(\mathbf{q}) = \tilde{p}(\mathbf{q})^n$$

Portanto, sob essas duas hipóteses, a expressão final toma a forma

$$P_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{p}(\mathbf{q})^n d^d \mathbf{q}. \quad (3.21)$$

Como um primeiro exemplo, consideremos o passeio isotrópico em duas dimensões, que será analisado na próxima sessão.

### 3.2.1 Passeio isotrópico em duas dimensões

Na análise do passeio isotrópico, faremos uso de um lema sobre funções isotrópicas que relaciona sua transformada de Fourier com uma integral unidimensional de funções de Bessel:

**Lema.** *Se  $f$  é uma função isotrópica, então, para  $d \geq 1$ :*

$$\int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d^d \mathbf{r} = 2\pi^{\frac{d}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{2}{qr}\right)^{\frac{d}{2}-1} J_{\frac{d}{2}-1}(qr) r^{d-1} f(r) dr, \quad (3.22)$$

sendo  $J_{\frac{d}{2}-1}$  a função de Bessel do primeiro tipo e de ordem  $\frac{d}{2} - 1$

Num passeio isotrópico em duas dimensões em que o tamanho do  $j$ -ésimo passo é  $a_j$  e  $|\mathbf{r}| = \rho$ , as probabilidades de transição são:

$$p_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\rho} \delta(\rho - a_j) \quad (3.23)$$

Tomando a transformada de Fourier de 3.23 e aplicando o lema para funções isotrópicas (3.22), obtemos:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_j(\mathbf{q}) &= 2\pi \int_0^\infty J_0(q\rho) \rho \frac{1}{2\pi\rho} \delta(\rho - a_j) d\rho \\ \tilde{p}_j(\mathbf{q}) &= J_0(qa_j)\end{aligned}\tag{3.24}$$

Inserindo a expressão para  $\tilde{p}_j(q)$  na solução 3.20 e assumindo que o passeio começa na origem:

$$P_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \prod_{j=1}^n J_0(qa_j) d^2\mathbf{q}\tag{3.25}$$

Introduzindo coordenadas polares  $(u, \phi)$  no plano  $\mathbf{q}$ , a expressão se transforma em:

$$P_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-iu|\mathbf{r}|\cos(\phi)} \prod_{j=1}^n J_0(ua_j) u du d\phi =\tag{3.26}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u \prod_{j=1}^n J_0(ua_j) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iu|\mathbf{r}|\cos(\phi)} d\phi \right] du\tag{3.27}$$

Pode ser demonstrado que a expressão integral em colchetes é equivalente à função de Bessel  $J_0(u|\mathbf{r}|)$ . Finalmente obtemos:

$$P_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u J_0(u|\mathbf{r}|) \prod_{j=1}^n J_0(ua_j) du\tag{3.28}$$

Se o tamanho de todos os passos for determinado pela mesma distribuição de probabilidade, isto é,  $a_j = a \forall j$ , a solução simplifica para:

$$P_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u J_0(u|\mathbf{r}|) J_0(ua)^n du\tag{3.29}$$

Infelizmente, não existem expressões fechadas das equações 3.28 e 3.29 para valores arbitrários de  $n$ . Até hoje,  $P_n(\mathbf{r})$  foi avaliada em termos de funções conhecidas apenas para  $n = 1, 2, 3$ , porém é possível avaliar seu comportamento para valores grandes de  $n$ . Nesse regime, a integral é determinada majoritariamente pelo comportamento do integrando para valores pequenos de  $u$ . A função de Bessel de ordem 0 ( $J_0(u)$ ) vale 1 quando  $u$  é nulo e se aproxima (não monotonicamente) de 0 à medida que  $u$  cresce, e o integrando consiste de um produto de  $n$  dessas funções. Dessa forma, quando  $n$  é grande, a principal

contribuição para a integral virá de valores pequenos de  $u$ . Primeiro, é necessário reescrever 3.28 em termos de logaritmos de funções de Bessel:

$$P_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u J_0(ur) \exp \left[ \sum_{l=1}^n \log J_0(ua_l) \right] du \quad (3.30)$$

Temos as seguintes expansões:

$$J_0(z) = 1 - \frac{1}{4}z^2 + O(z^4) \quad (3.31)$$

E:

$$\log(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3) \quad (3.32)$$

Portanto, fazendo a soma dos logaritmos:

$$\sum_{l=1}^n \log J_0(ua_l) = -\frac{1}{4}u^2 \sum_{l=1}^n a_l^2 + O(u^4) \quad (3.33)$$

E, por fim, substituindo em 3.30:

$$P_n(r) \sim \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u J_0(ur) \exp \left[ -\frac{1}{4}u^2 \sum_{l=1}^n a_l^2 \right] du \quad (3.34)$$

Existe uma identidade de funções de Bessel, válida para  $\nu > -1$ , que pode ser usada para avaliar a integral:

$$\int_0^\infty J_\nu(\beta u) \exp[-\alpha^2 u^2] du = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha^2)^{\nu+1}} \exp \left[ -\frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right] \quad (3.35)$$

Essa identidade é obtida transformando a função de Bessel em uma série de potências e integrando termo a termo. Aplicando em 3.34:

$$P_n(r) \sim \frac{1}{\pi n a^2} \exp \left[ -\frac{r^2}{n a^2} \right]; \quad (3.36)$$

$$a^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n a_l^2$$

É possível estabelecer aproximações mais poderosas utilizando, por exemplo, o método do ponto de sela, porém isso foge do escopo deste trabalho.

### 3.2.2 Passeios em redes com invariância translacional

Para introduzir o problema do passeio aleatório em redes, comecemos discutindo, não rigorosamente, o conceito de espaço acessível ao andarilho, ou seja, o conjunto de pontos que ele pode visitar durante um passeio infinito. Na seção anterior, foi estudado o problema do passeio aleatório em que não havia restrições para o tamanho nem para a direção de cada passo, de modo que o andarilho poderia visitar qualquer ponto do espaço em que ele se encontra. No entanto, se impusermos condições para o tamanho e para a direção dos passos que ele pode dar a cada instante, é possível transformar o espaço acessível ao andarilho. Sejam  $\{x_i\}_{i=1}^d$  vetores que formam uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^d$ . Se definirmos que os passos devem ter sempre o mesmo tamanho e que só podem ser dados na direção de algum vetor  $x_i$ , por exemplo, restringimos o espaço acessível do passeio a uma rede hipercúbica  $d$ -dimensional. O estudo do passeio aleatório em redes é de grande importância, principalmente, porque o conjunto de posições permitidas ao andarilho se torna um conjunto discreto, e há uma abundância de problemas que podem ser modelados como um conjunto discreto de estados.

Sejam  $p(s|s_0)$  a probabilidade de transição de um sítio  $s_0$  para um sítio  $s$ ; e  $P_n(s|s_0)$  a probabilidade de estar no sítio  $s$  após  $n$  passos, tendo começado do sítio  $s_0$ . Serão assumidas algumas hipóteses para os passeios com os quais trabalharemos, as chamadas condições de Pólya:

- $p(s_1|s_2) = p(s_2|s_1) \quad \forall (s_1, s_2)$ , de modo que o passeio não seja enviesado em nenhuma direção
- se  $p(s_1|s) > 0$  e  $p(s_2|s) > 0$ , então  $p(s_1|s) = p(s_2|s)$ , de modo que todas as transições possíveis são igualmente prováveis.

A partir dessas duas probabilidades, é possível estabelecer uma lei de evolução para a probabilidade de ocupação de sítios na forma de uma relação de recorrência, avaliando  $P_{n+1}(s|s_0)$ , ou seja, a probabilidade de o andarilho estar em  $s$  após  $n + 1$  passos. Suponhamos que o andarilho tenha realizado um passeio de  $n$  passos que acabou em  $s'$ . Nessa situação, a probabilidade de ele chegar em  $s$  no passo  $n + 1$  é  $p(s|s')$ . Somando sobre todos os sítios  $s'$  e multiplicando pelas respectivas probabilidades de os passeios iniciais ocorrerem:

$$P_{n+1}(s|s_0) = \sum_{s'} p(s|s')P_n(s'|s_0) \quad (3.37)$$

Até aqui, não foram impostas condições sobre a estrutura da rede, e a equação 3.37 vale para qualquer passeio que obedeça as condições de Pólya. A partir de agora, serão discutidos passeios em redes periódicas e infinitas, em que a probabilidade de passar de um sítio  $l$  para um sítio  $l'$  dependa apenas de  $l - l'$ , a posição relativa entre os sítios. Essa

propriedade é chamada de invariância translacional, já que a probabilidade de passar de um sítio para outro se mantém constante sob deslocamentos translacionais. Denotando a probabilidade de passar do sítio  $l'$  para o sítio  $l$  por  $P(l|l')$ ; e a probabilidade de um passo gerar um deslocamento de  $l$  por  $p(l)$ , temos:

$$\begin{aligned} P(l|l') &= p(l - l') \\ P(l + k|l' + k) &= p(l + k - l' - k) = p(l - l') \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para podermos transpor os resultados obtidos até agora para a notação de redes com invariância translacional, basta substituir:

- $s|s_0 \rightarrow l$
- $s_0|s_0 ; s|s \rightarrow 0$
- $s_0|s \rightarrow -l$

Se  $p(l)$  é a probabilidade de um passo gerar um deslocamento  $l$ , dependendo de sua forma específica, o andarilho pode estar livre para acessar todos os sítios da rede ou apenas um subconjunto periódico de sítios. Sob essa nova notação, a equação que descreve a evolução do passeio (3.37) se torna:

$$P_{n+1}(l) = \sum_{l'} p(l - l') P_n(l') \quad (3.39)$$

Similarmente ao problema do passeio bidimensional geral, para resolver essa equação, introduzimos a transformada de Fourier, porém dessa vez em sua versão discreta:

$$\tilde{P}_n(k) = \sum_l e^{il \cdot k} P_n(l) \quad (3.40)$$

E a chamada função de estrutura do passeio:

$$\lambda(k) = \sum_l e^{il \cdot k} p(l) \quad (3.41)$$

Tomando a transformada de 3.39:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{n+1}(k) &= \sum_l e^{il \cdot k} \left[ \sum_{l'} p(l - l') P_n(l') \right] \\ &= \sum_{l'} \left[ \sum_l e^{i(l-l') \cdot k} p(l - l') \right] e^{il' \cdot k} P_n(l') \end{aligned} \quad (3.42)$$

A expressão entre colchetes na equação 3.42 pode ser identificada como a própria função de estrutura do passeio  $\lambda(k)$ , portanto:

$$\tilde{P}_{n+1}(k) = \lambda(k)\tilde{P}_n(k) \quad (3.43)$$

Como  $P_0(l) = \delta_{l0} \Rightarrow \tilde{P}_0(k) = 1$ , obtemos uma relação de recursão para  $\tilde{P}_n(k)$ :

$$\tilde{P}_n(k) = \lambda^n(k) \quad (3.44)$$

A transformada de Fourier discreta pode ser invertida de modo análogo à contínua:

$$P_n(l) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_B e^{-il \cdot k} \tilde{P}_n(k) d^d k \quad (3.45)$$

sendo B a primeira zona de Brillouin  $[-\pi, \pi]^d$

Obtemos, assim, uma solução formal para o problema do passeio aleatório numa rede com invariância translacional:

$$P_n(l) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_B e^{-il \cdot k} \lambda^n(k) d^d k \quad (3.46)$$

### 3.2.3 Transitividade e recorrência

Apesar de uma solução formal para o problema ter sido obtida com a equação 3.46, extrair resultados exatos dela não é uma tarefa trivial, pois a integral pode se mostrar extremamente difícil de resolver analiticamente para valores arbitrários de  $n$ . Desse modo, será introduzido, superficialmente, o formalismo de funções geratrizes, que nos permitirá extrair algumas informações estatísticas importantes do passeio a partir de uma única função: a função geratriz associada à probabilidade de ocupação de sítio  $P_n(s|s_0)$ . A discussão será fundamentada nas seguintes probabilidades:

- $P_n(s|s_0)$ : probabilidade de estar no sítio  $s$  após  $n$  passos, tendo começado do sítio  $s_0$
- $F_n(s|s_0)$ : probabilidade de visitar o sítio  $s$  pela **primeira vez** no  $n$ -ésimo passo, tendo começado em  $s_0$
- $R(s|s_0)$ : probabilidade de que o sítio  $s$  seja eventualmente visitado num passeio infinito, tendo começado do sítio  $s_0$

A probabilidade de ocupação de sítio  $P_n(s|s_0)$  é uma distribuição num tempo  $n$  fixo, portanto obedece à condição de normalização:

$$\sum_s P_n(s|s_0) = 1, \quad (3.47)$$

onde a soma é efetuada sobre todos os sítios da rede. Por outro lado, a distribuição temporal de primeira passagem  $F_n(s|s_0)$  é uma distribuição sobre o tempo  $n$ , com sítios de origem ( $s_0$ ) e destino ( $s$ ) fixos, portanto deve obedecer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(s|s_0) = R(s|s_0) \leq 1, \quad (3.48)$$

O formalismo de funções geratrizes consiste, basicamente, em substituir uma sequência  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  por uma série de potências associada:

$$c(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n, \quad (3.49)$$

em que a variável complexa  $\xi$  assume valores suficientemente pequenos para que a série convirja. Dessa forma, relações de recorrência envolvendo  $c_n$  transformam-se em expressões algébricas envolvendo  $c(\xi)$ , e, uma vez que  $c(\xi)$  seja encontrado explicitamente, é possível resgatar os coeficientes da sequência original via o seguinte resultado de análise complexa:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{c(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \quad (3.50)$$

sendo  $\Gamma$  um contorno fechado simples em torno de  $\xi = 0$  e que esteja dentro do raio de convergência da série.

Agora introduzimos as seguintes funções geratrizes:

$$P(s|s_0; \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s|s_0) \xi^n ; \quad |\xi| < 1 \quad (3.51)$$

$$F(s|s_0; \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s|s_0) \xi^n ; \quad |\xi| < 1 \quad (3.52)$$

Como  $0 \leq P_n(s|s_0) \leq 1$  e  $0 \leq F_n(s|s_0) \leq 1$ , as séries são convergentes para  $|\xi| \leq 1$ , e é possível estabelecer uma relação bastante intuitiva entre elas. Para isso, basta notar que evento "o andarilho está no sítio  $s$ " nada mais é do que a composição dos eventos independentes:

1. O andarilho chegou pela primeira vez em  $s$  após  $j$  passos
2. O andarilho saiu de  $s$  e percorreu um caminho de  $n - j$  passos que terminou em  $s$

As probabilidades para esses eventos são, respectivamente:

1.  $F_j(s|s_0)$
2.  $P_{n-j}(s|s)$

Portanto, interpretando o somatório como nulo quando  $n = 0$ , temos:

$$P_n(s|s_0) = \delta_{ss_0}\delta_{n0} + \sum_{j=1}^n F_j(s|s_0)P_{n-j}(s|s) ; \quad n \geq 0 \quad (3.53)$$

Multiplicando a equação 3.53 por  $\xi^n$  e somando sobre  $n$ , obtemos:

$$P(s|s_0; \xi) = \delta_{ss_0} + F(s|s_0; \xi)P(s|s; \xi) \quad (3.54)$$

ou

$$F(s|s_0; \xi) = \frac{P(s|s_0; \xi) - \delta_{ss_0}}{P(s|s; \xi)} \quad (3.55)$$

Analisemos agora a probabilidade  $R(s|s_0)$  de que o sítio  $s$  seja, eventualmente, visitado. Se denotarmos  $\lim_{\xi \rightarrow 1^-} F(s|s_0; \xi)$  por  $F(s|s_0; 1^-)$ , temos, segundo 3.48 e 3.54 :

$$R(s|s_0) = \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \frac{P(s|s_0; \xi)}{P(s|s; \xi)} ; \quad \text{se } s \neq s_0 \quad (3.56)$$

e

$$R(s_0|s_0) = 1 - \frac{1}{P(s_0|s_0; 1^-)} ; \quad \text{se } s = s_0 \quad (3.57)$$

Se  $R(s_0|s_0) = 1$ , ou seja, se o andarilho garantidamente voltar à posição inicial, o passeio é chamado de **recorrente**. Se, por outro lado,  $R(s_0|s_0) < 1$ , o passeio é chamado de **transitivo**. Existe uma interpretação bastante simples e esclarecedora para a função geratriz  $P(s|s_0; 1^-)$ : ela representa o valor esperado do número de vezes que o sítio  $s$  é ocupado durante o passeio, como explicitado a seguir.

Seja  $I_n$  uma variável aleatória indicadora, que assume o valor 1 se o sítio  $s$  está ocupado no  $n$ -ésimo passo, e vale 0 caso contrário, de modo que o valor esperado de  $I_n$  é  $\langle I_n \rangle = P_n(s|s_0)$ . O número de vezes que o sítio  $s$  é ocupado durante o passeio é

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Portanto, o valor esperado do número de vezes que o sítio  $s$  é ocupado é:

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} I_n \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle I_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s|s_0) = P(s|s_0; 1^-) \quad (3.58)$$

Esse resultado tem uma implicação importante para determinar se um passeio é recorrente ou transitivo: num passeio recorrente, o número de visitas ao sítio inicial é infinito, portanto é necessário que  $P(s_0|s_0; \xi)$  diverja quando  $\xi \rightarrow 1^-$ .

Outro resultado de grande importância para o estudo de passeios aleatórios é o chamado teorema da recorrência, que nos permite tirar conclusões bastante gerais sobre  $R(s|s_0)$ ,  $R(s_0|s)$  e  $R(s|s)$  simplesmente sabendo se  $R(s_0|s_0)$  é unitário ou não, ou seja, se o passeio é recorrente ou não. O teorema afirma o seguinte: se os sítios  $s$  e  $s_0$  são conectados, ou seja, se  $s$  é acessível para um andarilho em  $s_0$  e vice-versa, então:

$$R(s_0|s_0) = R(s|s) = R(s_0|s) = R(s|s_0) = 1$$

ou

$$R(s_0|s_0) < 1; R(s|s) < 1; R(s_0|s)R(s|s_0) < 1$$

Seja  $\Omega(s_0)$  o conjunto de sítios  $s$  tais que  $R(s|s_0) > 0$  e  $R(s_0|s) > 0$ . Então, de acordo com o teorema, obtemos dois resultados importantes sobre o passeio em  $\Omega(s_0)$ :

- a propriedade de recorrência ou transitividade de um passeio em  $\Omega(s_0)$  não depende da escolha do sítio onde o passeio começa
- se um passeio é recorrente, todos os sítios  $s \in \Omega(s_0)$  serão visitados

O último aspecto a ser discutido com o formalismo de funções geratrizes é o tempo médio até que um sítio  $s$  seja visitado. Para evitar entrar na discussão de qual deve ser esse tempo médio quando  $R(s|s_0) < 1$ , trataremos apenas o tempo médio **condicional** de primeira passagem  $\tau(s|s_0)$ , ou seja, o número médio de passos até que o sítio  $s$  seja visitado, sob a condição de que tal sítio é eventualmente visitado. A probabilidade (condicional) de um andarilho chegar no sítio  $s$  pela primeira vez após  $n$  passos é simplesmente  $F_n(s|s_0)/R(s|s_0)$ , portanto tempo médio condicional de primeira passagem é:

$$\tau(s|s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nF_n(s|s_0)}{R(s|s_0)} \quad (3.59)$$

Lembrando da definição de  $F(s|s_0; \xi)$  (equação 3.52), é possível notar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s|s_0) = \frac{\partial}{\partial \xi} [F_n(s|s_0; 1^-)] \quad (3.60)$$

Por fim, usando a relação 3.55, obtemos:

$$\tau(s|s_0) = \frac{1}{R(s|s_0)} \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{P(s|s_0; \xi)}{P(s|s; \xi)} \right] ; \text{ para } s \neq s_0 \quad (3.61)$$

e

$$\tau(s_0|s_0) = \frac{1}{R(s|s_0)} \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \frac{P'(s_0|s_0; \xi)^2}{P(s_0|s_0; \xi)} \quad (3.62)$$



## 4 Uma releitura do modelo Talent vs Luck

### 4.1 O modelo TvL como $M$ passeios aleatórios independentes

No artigo [2], os autores têm como objetivo avaliar o impacto da aleatoriedade contra o do “talento” de um indivíduo em sua carreira. No entanto, existem alguns aspectos do modelo aos quais não foi dada atenção adequada, e que podem ser críticos para as conclusões obtidas. Em seu modelo, como descrito no capítulo 2, os autores criam uma rede quadrada, fixam indivíduos em posições aleatórias, e introduzem eventos de sorte e de azar que realizam passeios aleatórios dentro da rede e definem a dinâmica de evolução do capital de todos os indivíduos. No entanto, não fosse pela escolha do mecanismo dos eventos, não haveria necessidade de introduzir uma rede quadrada, já que não há nenhum tipo de interação entre os indivíduos e todas as posições da rede têm a mesma dinâmica de evolução. Tendo isso em mente, é possível estabelecer um mecanismo equivalente e que não necessita de uma estrutura espacial. Nota-se que os passeios aleatórios realizados pelos pontos de eventos são não-enviesados e o número de passos que eles dão equivale ao número de iterações da simulação. O fato de eles serem não-enviesados significa que o valor esperado da posição de um evento  $i$  após  $n$  passos é sua própria posição inicial  $r_i(0)$ :

$$\langle r_i(n) \rangle = r_i(0), \quad (4.1)$$

o que implica em regiões mais ricas em eventos do que outras. A seguir será discutida uma outra abordagem do problema, que não apenas contornará a questão de exposições diferentes à aleatoriedade, mas também diminuirá a complexidade computacional e revelará um aspecto importante do modelo TvL original. Tal abordagem também terá como principais hipóteses as três apresentadas no capítulo 2.2:

1. Sejam A e B indivíduos na sociedade, com talentos  $T_A$  e  $T_B$ , respectivamente. Então, se  $T_A > T_B$ , o indivíduo A tem maior probabilidade de ser bem sucedido que o indivíduo B
2. Eventos de sorte não podem diminuir o capital de nenhum indivíduo, assim como eventos de azar não podem aumentar o capital de nenhum indivíduo
3. O talento na população segue uma distribuição aproximadamente normal

Suponhamos que, a cada iteração, cada indivíduo está sujeito a probabilidades de passar por eventos de sorte, de azar, ou não passar por eventos:

- $P_N = d$  : probabilidade de não passar por evento algum
- $P_U = \frac{1-d}{2}$  : probabilidade de passar por um evento de azar
- $P_L = \frac{1-d}{2}$  : probabilidade de passar por um evento de sorte

As probabilidades  $P_U$  e  $P_L$  são iguais para refletir a escolha do modelo TvL de quantidades iguais de eventos de sorte e de azar. Isso é equivalente a dizer que são realizados  $N$  (um para cada indivíduo) passeios aleatórios independentes nos inteiros, em que andar para a direita significa passar por um evento de sorte e conseguir aproveitá-lo, andar para a esquerda significa passar por um evento de azar, e manter-se na mesma posição significa não passar por eventos ou não conseguir se aproveitar de um evento de sorte:

- $P_0 = d + (1 - T_k)\frac{1-d}{2}$  : probabilidade de não alterar o capital (manter-se na mesma posição)
- $P_- = \frac{1-d}{2}$  : probabilidade de diminuir o capital pela metade (andar para a esquerda)
- $P_{k+} = T_k(\frac{1-d}{2})$  : probabilidade de dobrar o capital (andar para a direita)

Nota-se que, neste passeio, a probabilidade de um indivíduo  $k$  andar para a direita depende de seu talento  $T_k$  e, como consequência disso, as probabilidades de andar para a direita e para a esquerda não são necessariamente iguais. Diz-se que um passeio aleatório é simétrico se as probabilidades de dar um passo em cada direção permitida são iguais. Nesse caso, a probabilidade de andar para a direita passa a depender do talento  $T_k$  de cada indivíduo, mas como  $T_k \leq 1 \forall k$ , podemos afirmar que:

$$\left(\frac{1-d}{2}\right) \geq T_k \left(\frac{1-d}{2}\right) \Rightarrow P_- \geq P_{k+} \quad (4.2)$$

Isso quer dizer que, a menos que um indivíduo tenha talento igual a um, o que significaria que ele consegue transformar todas as oportunidades em capital, o passeio aleatório que determina seu capital é enviesado para a esquerda. Analisemos agora o valor esperado do capital de um indivíduo  $k$  após  $t$  passos. Para qualquer passeio aleatório começando do zero, a posição  $\mathbf{r}_k(t)$  após  $t$  passos é dada por:

$$\mathbf{r}_k(t) = \sum_{j=1}^t \mathbf{m}_j(k) \quad (4.3)$$

sendo  $\mathbf{m}_j(k)$  o vetor deslocamento no  $j$ -ésimo passo (que nesse caso pode assumir os valores (1), (0) e (-1)). Tomemos agora o valor esperado da equação 4.3:

$$\langle \mathbf{r}_k(t) \rangle = \sum_{j=1}^t \langle \mathbf{m}_j(k) \rangle \quad (4.4)$$

No entanto, o valor esperado do deslocamento de um indivíduo é, por hipótese, constante para todos os passos  $j$ , portanto podemos escrever:

$$\langle \mathbf{r}_k(t) \rangle = t \cdot \langle \mathbf{m}(k) \rangle \quad (4.5)$$

E o valor esperado de  $\mathbf{m}(k)$  é simplesmente a soma dos possíveis deslocamentos multiplicados por suas respectivas probabilidades:

$$\langle \mathbf{m}(k) \rangle = -1 \cdot \left[ \frac{1-d}{2} \right] + 0 \cdot \left[ d + (1-T_k) \frac{1-d}{2} \right] + 1 \cdot \left[ T_k \left( \frac{1-d}{2} \right) \right] = - \left[ \frac{1-d}{2} \right] (1-T_k) \quad (4.6)$$

Portanto:

$$\langle \mathbf{r}_k(t) \rangle = -t \left[ \frac{1-d}{2} \right] (1-T_k) \quad (4.7)$$

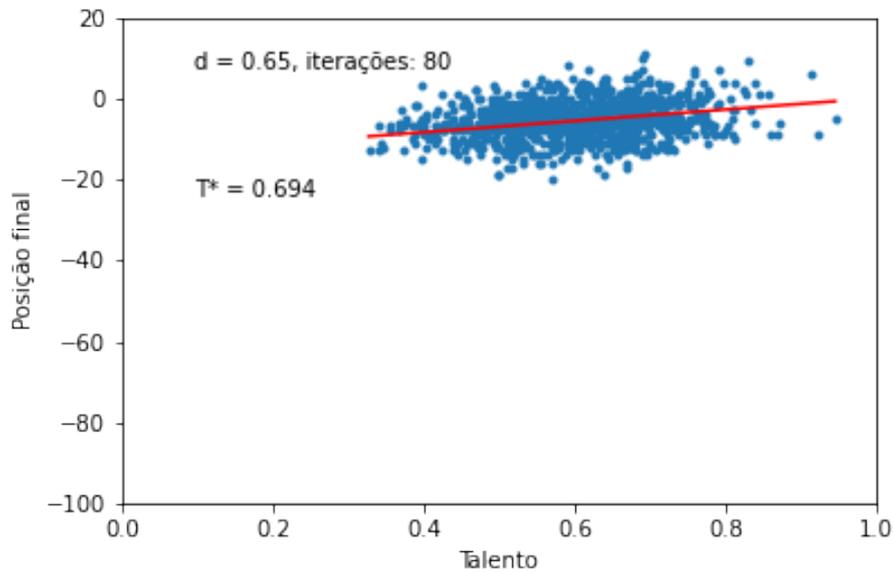
$$\langle C_k(t) \rangle = 10 \cdot 2^{-t \left[ \frac{1-d}{2} \right] (1-T_k)} \quad (4.8)$$

A partir das equações 4.7 e 4.8, é possível notar dois elementos importantes da evolução do capital:

1. Para os indivíduos com talento  $T_k < 1$  - que compõem toda a população - o valor esperado de seu capital após  $t$  passos não somente é menor que o capital inicial, mas também diminui exponencialmente com  $t$ .
2. Os parâmetros  $d$  e  $T_k$ , que representam, respectivamente, a probabilidade de não ocorrer eventos e o talento do indivíduo  $k$ , são responsáveis por diminuir a velocidade com a qual seu capital esperado decresce.

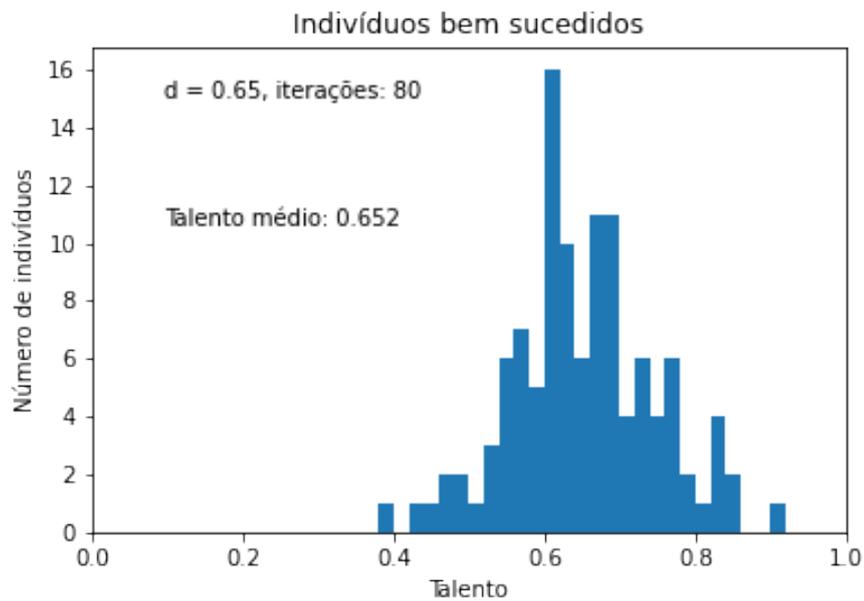
### 4.1.1 Resultados

Serão apresentados e discutidos agora resultados de simulações usando o modelo de passeios aleatórios, variando os parâmetros  $d$  e o número de iterações  $t$ . Para cada valor de  $t$ , serão apresentados a distribuição final de posição em função do talento e um histograma de indivíduos bem sucedidos (com posição final  $\mathbf{r}_k(t) > 0$ ). O valor  $T^*$  representa o talento do indivíduo mais bem sucedido da simulação.

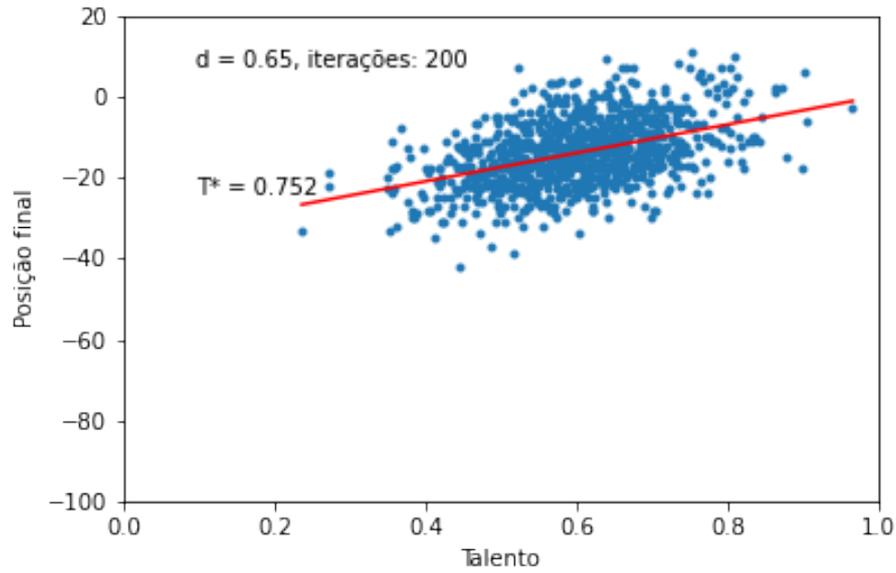


(a) Distribuição final da posição

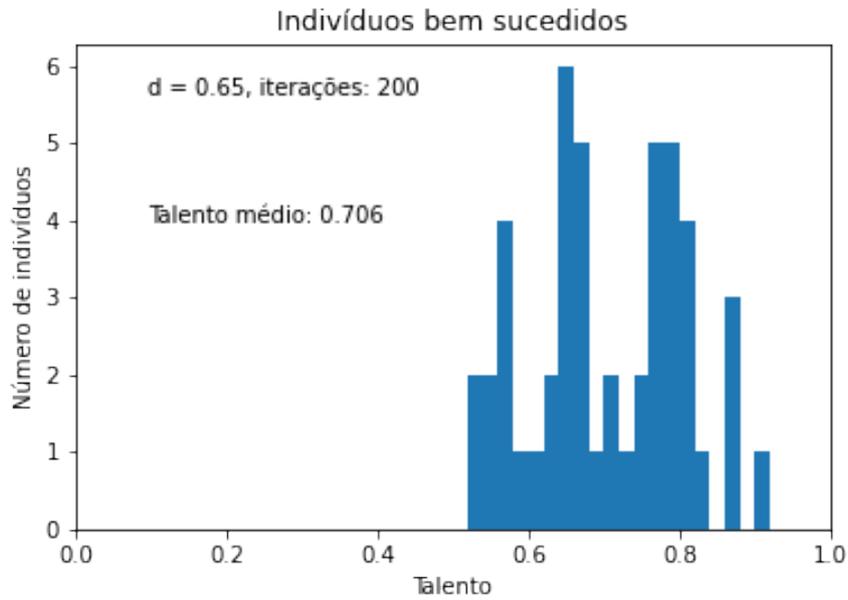
$$- : \langle r(T_k) \rangle = 80 \left[ \frac{1-d}{2} \right] (T_k - 1)$$



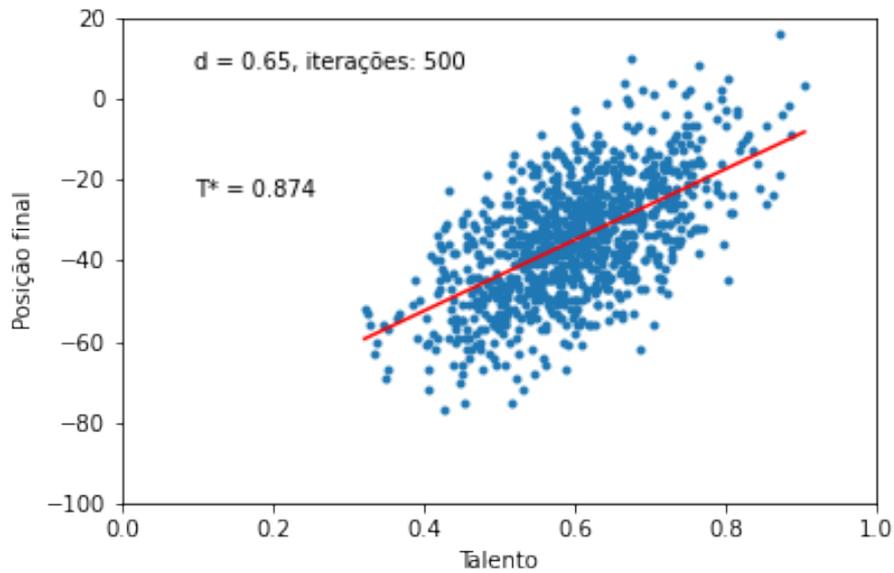
(b) Histograma dos indivíduos com posição final positiva



(a) Distribuição final da posição  
 - :  $\langle r(T_k) \rangle = 200 \left[ \frac{1-d}{2} \right] (T_k - 1)$

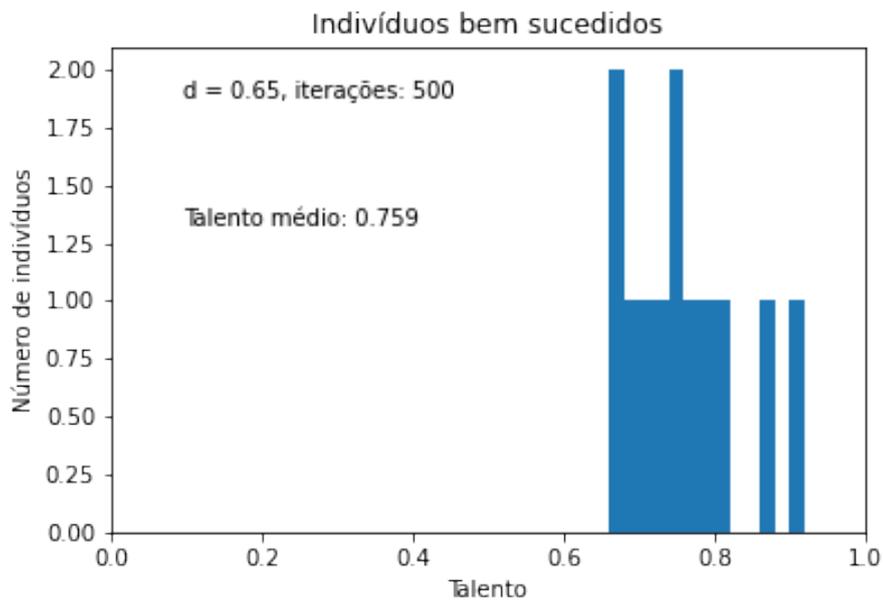


(b) Histograma dos indivíduos com posição final positiva

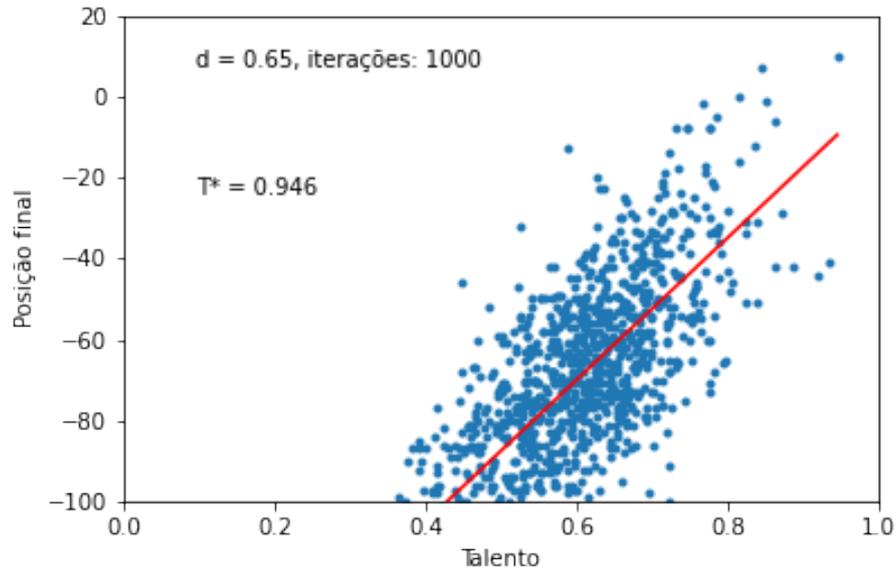


(a) Distribuição final da posição

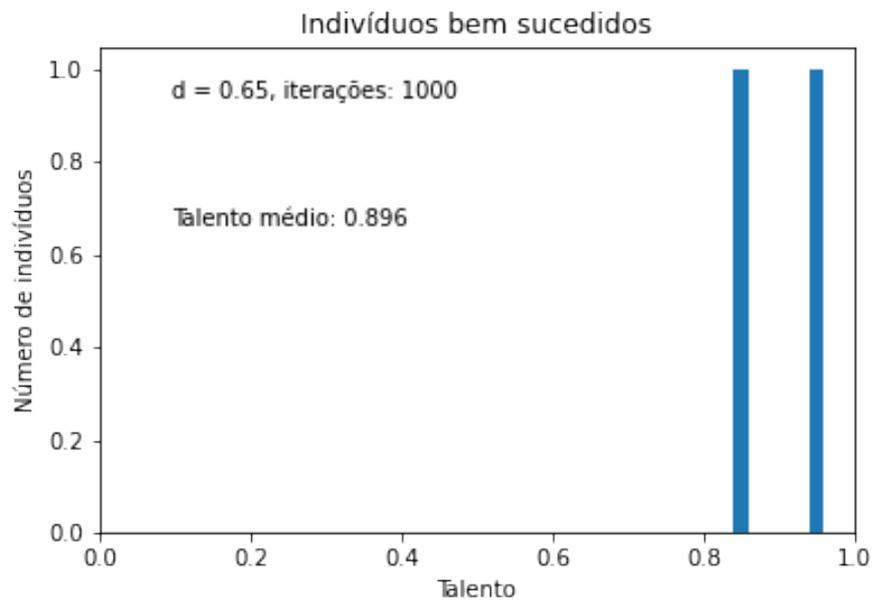
$$- : \langle r(T_k) \rangle = 500 \left[ \frac{1-d}{2} \right] (T_k - 1)$$



(b) Histograma dos indivíduos com posição final positiva



(a) Distribuição final da posição  
 - :  $\langle r(T_k) \rangle = 1000 \left[ \frac{1-d}{2} \right] (T_k - 1)$



(b) Histograma dos indivíduos com posição final positiva

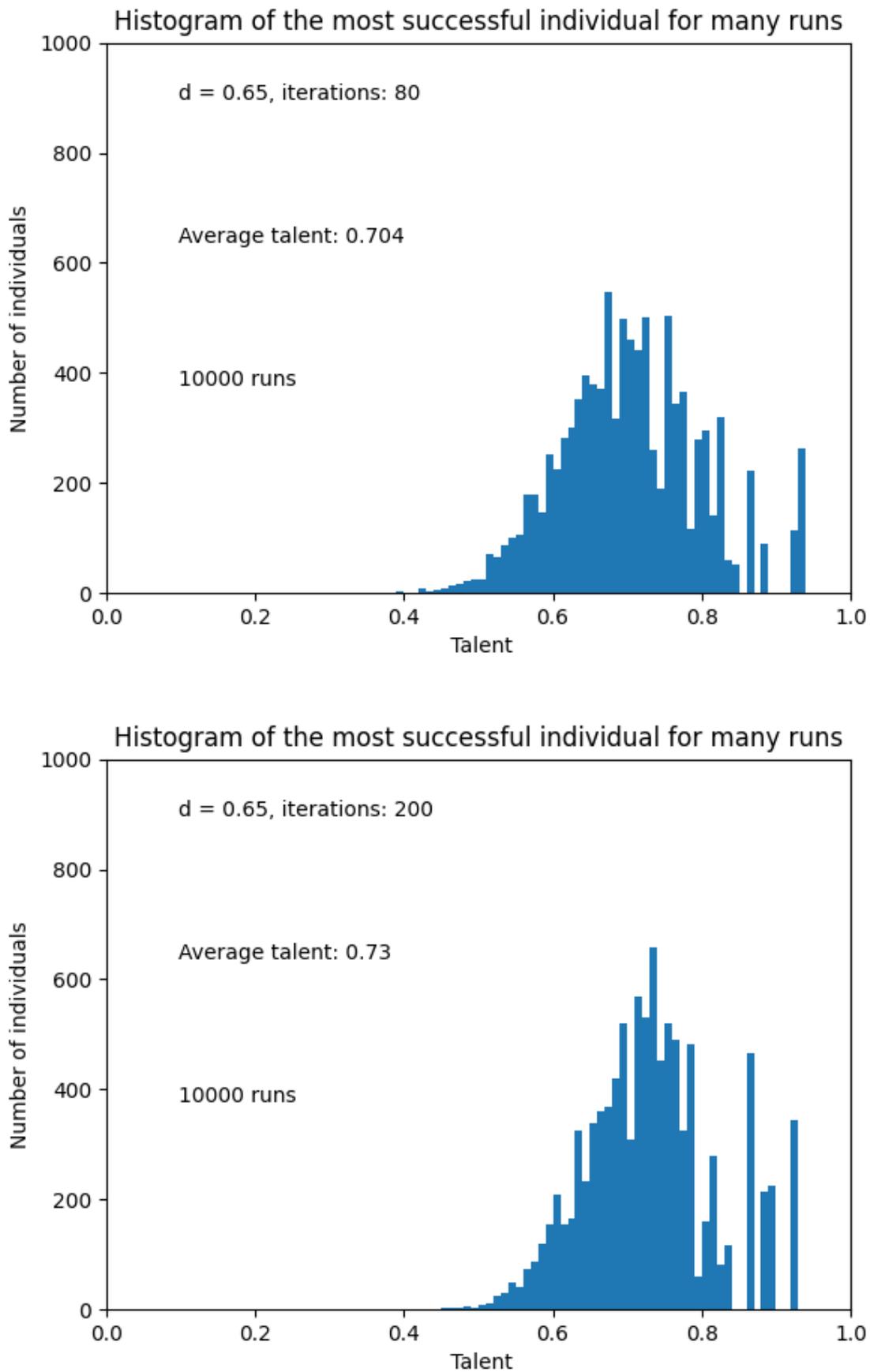


Figura 13 – Histograma do talento dos indivíduos mais bem sucedidos ao longo de 10000 simulações

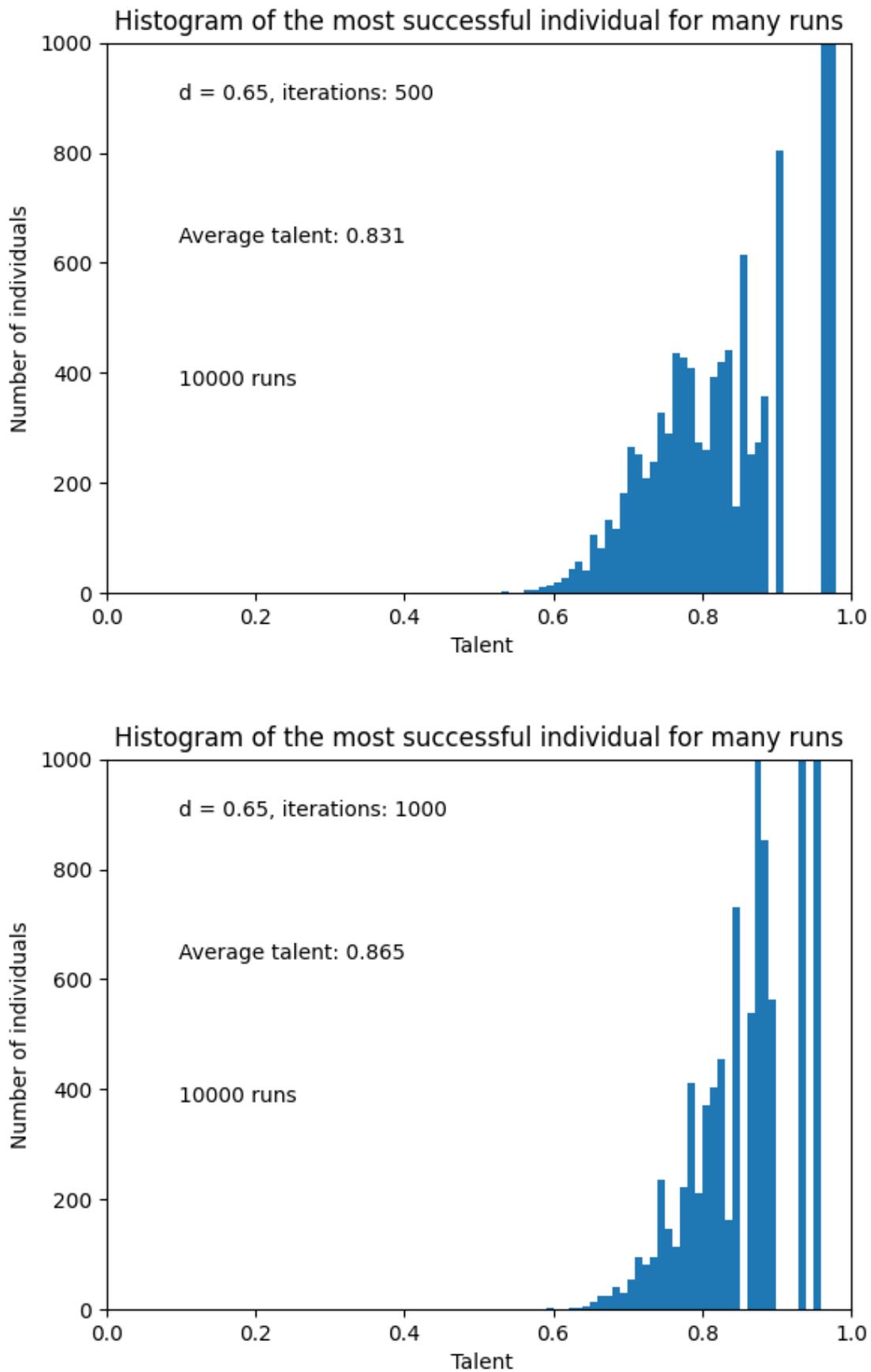


Figura 14 – Histograma do talento dos indivíduos mais bem sucedidos ao longo de 10000 simulações

### 4.1.2 Discussão dos resultados

Com 80 iterações, a distribuição final da posição é similar à do artigo, no sentido de que tanto o talento do indivíduo mais bem sucedido ( $T^* = 0.694$ ) quanto o talento médio dos indivíduos bem sucedidos ( $T_m = 0.652$ ) estão próximos da média. Isso acontece, como discutido anteriormente, porque existem muito mais indivíduos de talento médio do que de talento elevado. Os indivíduos de talento mais alto têm, de fato, um valor esperado de posição final maior que os indivíduos de talento médio, porém o desvio padrão da posição final na região de talento médio é suficiente para superar essa diferença. O que acontece à medida que aumentamos o número de passos  $t$ ?

O desvio padrão da posição num passeio aleatório simples cresce proporcionalmente à raiz quadrada do número de passos,  $\sqrt{t}$ . No entanto, a diferença entre os valores esperados de posição final para indivíduos com talentos distintos cresce **linearmente** com  $t$ :

$$\langle \mathbf{r}_{\mathbf{T}_1}(t) \rangle - \langle \mathbf{r}_{\mathbf{T}_2}(t) \rangle = t \left[ \frac{1-d}{2} \right] (T_1 - T_2) \quad (4.9)$$

Isso significa que, a partir de um certo valor de  $t$ , será muito difícil encontrar um indivíduo de talento médio com posição final maior que um indivíduo de talento alto, como é possível observar nas figuras acima. Além disso, vale notar também que, quanto maior for o valor de  $t$ , menos indivíduos, em média, serão bem sucedidos, já que o passeio é enviesado para a esquerda.

É inadequado, portanto, concluir que a sorte é simplesmente mais importante que o talento para o sucesso de um indivíduo, tal importância depende do número de iterações  $t$  e do parâmetro  $d$ . Seria possível argumentar que  $t \geq 200$  é um número irreal de oportunidades de dobrar o capital de um indivíduo, e que por isso não há necessidade de considerar esses casos. No entanto, no modelo de passeios aleatórios, o que está sendo considerado não é o capital de cada indivíduo, e sim sua posição no passeio, ou seja, seu saldo de **eventos de sorte aproveitados** contra **eventos de azar**. Não é preciso adotar o mesmo mapeamento entre posição e capital que os autores do modelo TvL adotam. Em outras palavras, não é intrínseco ao modelo de passeios aleatórios que um indivíduo que se aproveita de um evento de sorte tenha seu capital dobrado. A única restrição que o modelo impõe sobre a associação entre posição e capital é que ela seja não decrescente, para obedecer as hipóteses explicitadas nos capítulos 2.2 e 4.1. Dessa forma, os resultados e conclusões desse modelo valem para qualquer associação entre a posição  $\mathbf{r}_k(t)$  no passeio e o capital  $C_k(t)$  que obedeça tal condição.

## 5 Conclusões e perspectivas

### 5.1 Conclusões

As ideias e resultados apresentados neste trabalho devem, como em qualquer trabalho científico, ser interpretadas como peças de um quebra-cabeça, e não como uma resposta absoluta para uma questão. O modelo TvL introduzido em [2] foi uma primeira abordagem de atacar o problema do impacto da sorte no sucesso social de um indivíduo, e, nesse aspecto, é de grande importância. No entanto, como explicitado nos capítulos 2 e 4, o modelo apresenta severas limitações e deixa de considerar um fator crítico para a dinâmica de evolução do sucesso, o número de iterações.

Deve-se notar, como discutido no capítulo 1, que o problema que motiva o modelo TvL é extremamente complexo e envolve diversas áreas do conhecimento, que é a desigualdade social observada hoje e suas raízes. Com isso em mente, é natural que o modelo tente isolar um aspecto do problema para discutir e simplificar o resto. Entretanto, também é importante ter em mente que, eventualmente, quando o conhecimento sobre tal aspecto estiver consolidado, é preciso que o modelo comporte a introdução de outras camadas do problema. A proposta deste trabalho foi a de refinar o modelo TvL, contornar suas limitações e transformá-lo numa plataforma base para facilitar a incorporação de diversos outros aspectos do problema, como a interação entre agentes ou o uso de uma distribuição inicial de capital não uniforme.

Uma das principais conclusões em que [2] chega é que a sorte importa mais que o talento para que um indivíduo seja bem sucedido, e, como observado no capítulo 4, tal conclusão é inadequada. A ideia é que o impacto do talento e da sorte dependem do número  $t$  de iterações de cada simulação. Associando o papel da sorte ao **desvio padrão** da posição no passeio aleatório e o papel do talento ao **valor esperado** da mesma posição, observamos que o impacto da sorte começa maior e cresce com a raiz quadrada de  $t$ , enquanto o impacto do talento começa menor e cresce linearmente com  $t$ . Portanto, é natural que, a partir de um certo número de iterações, o impacto do talento seja maior que o da sorte, e que a distribuição final de capital seja tal que os indivíduos mais bem sucedidos são também os mais talentosos, como mostrado no capítulo 4.

Além disso, a reformulação do modelo TvL mostra que não é preciso adotar a dinâmica de dobrar e ou diminuir pela metade o capital, basta que a associação entre posição e capital seja não decrescente. Isso é importante para sustentar a ideia apresentada acima de que o número de iterações influencia no impacto da sorte e do talento. Caso fosse necessário manter a mesma dinâmica, o argumento anterior não seria tão forte, pois

considerar, por exemplo,  $t \geq 200$  oportunidades de dobrar ou diminuir pela metade o capital de um indivíduo ao longo de sua vida tornaria o modelo muito distante da realidade. No entanto, não havendo necessidade de ser uma dinâmica de evolução tão drástica, é possível formular modelos realistas que levam em consideração muitas iterações.

Finalmente, para usar o modelo de passeios aleatórios como uma ferramenta para extrair conclusões sobre a realidade, é preciso apresentar uma forte motivação para a escolha de associação posição-capital e para o número  $t$  de iterações considerado.

## 5.2 Perspectivas

Como dito anteriormente, um dos objetivos deste trabalho é a proposta de um modelo que trate do núcleo fundamental do problema, mas que também comporte extensões para o estudo de outros aspectos. A seguir, são listadas, e posteriormente discutidas, algumas extensões bastante naturais do modelo que permitem o estudo de alguns desses outros aspectos:

1. Utilizar uma rede quadrada para avaliar a dinâmica de evolução com interações entre os indivíduos, analisando passeios aleatórios acoplados
2. Desequilibrar as probabilidades de passar por eventos de sorte e de azar
3. Distribuir não uniformemente o capital inicial

### 5.2.1 Modelo com interação entre agentes

Uma ideia particularmente natural de expansão do modelo, e muito usada na física, é a de fixar os agentes numa rede quadrada e introduzir algum tipo de interação entre vizinhos. Essa possibilidade é de extrema importância para o modelo porque, por se tratar de um problema social, as interações entre agentes certamente são importantes para a dinâmica de evolução do capital.

A escolha de interação pode ser usada para simular tendências humanas, e esse é um contexto rico para a aplicação de conceitos de teoria dos jogos. É possível, por exemplo, estabelecer uma interação que represente uma estratégia de cooperação entre vizinhos, ou uma que represente apenas a competição acirrada, e isso pode nos trazer informações relevantes sobre as estratégias ótimas a se adotar.

### 5.2.2 Probabilidades de eventos de sorte e de azar desequilibradas

Essa ideia, apesar de parecer sutil, tem grande impacto na dinâmica do modelo, e envolve um conceito mencionado apenas brevemente até então: a ideia de um valor crítico  $T_C$  do talento. No capítulo 2, foi dito que, a menos que um indivíduo possua talento unitário, o passeio aleatório que ele realiza é enviesado para a esquerda, ou seja, ele tende a perder capital ao longo do tempo. Em outras palavras, existe um valor crítico  $T_C$  de talento para o qual o passeio aleatório associado é simétrico, que nesse caso é  $T_C = 1$ . Isso acontece porque foi mantida, na proposta inicial do modelo de passeios aleatórios, a hipótese de que a chance de passar por um evento de azar é a mesma de passar por um evento de sorte. Essa hipótese, apesar de não explícita, existe no artigo original, manifesta na escolha de usar a mesma quantidade de “bolinhas” de sorte e de azar. Para definir um pouco mais formalmente, o talento crítico  $T_C$  é o valor que satisfaz, seguindo a notação do capítulo 4, a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} P_+ &= P_- \\ P_L T_C &= P_U \end{aligned} \tag{5.1}$$

Considerando que  $P_L > 0$ , seja, que a chance de passar por um evento de sorte é não nula, é possível escrever:

$$T_C = \frac{P_U}{P_L} \tag{5.2}$$

Tendo essa expressão, é possível inferir alguns comportamentos esperados do sistema:

- $P_L = P_U \Rightarrow T_C = 1$

Esse é o caso estudado no modelo de passeios aleatórios do capítulo 4, em que é notável a diminuição da quantidade de indivíduos bem sucedidos quando o número de iterações cresce. Isso é consequência direta do fato de o valor do talento crítico  $T_C$  ser maior que o valor da média de talento da população  $T_M$ .

$$T_C = 1 > T_M = 0.6 \tag{5.3}$$

- $P_L < P_U \Rightarrow T_C > 1$

Nesse caso, o valor do talento crítico será maior que 1, portanto estará fora do alcance de qualquer agente. Esse caso, na verdade, é simplesmente um cenário mais extremo do caso estudado, em que a tendência de diminuir o capital é ainda mais forte e esse processo ocorre de forma mais rápida.

- $P_L > P_U \Rightarrow T_C < 1$

Por fim, nesse regime, o talento crítico é menor que 1, o que significa que é possível que exista uma quantidade relevante de agentes com talento maior que ou igual a  $T_C$ . Nesse caso, dependendo da quantidade de indivíduos com talento maior que  $T_C$ , a tendência global pode ser deslocada para o ganho de capital.

### 5.2.3 Distribuição não uniforme de capital inicial e talento dependente de capital

Uma ideia extremamente relevante para um modelo que almeja retratar a realidade socioeconômica é distribuir o capital inicial de modo não uniforme. A distribuição de renda observada hoje é claramente desigual, e isso representa um fator crítico na evolução do sucesso de um indivíduo. Indivíduos com mais capital possuem acesso a mais recursos e oportunidades (educação, tecnologia, etc.), o que os torna drasticamente mais propensos ao sucesso se comparados àqueles que não têm acesso a isso. No caso de um modelo com uma distribuição inicial não uniforme, os passeios realizados pelos agentes seriam os mesmos, porém a posição inicial de cada um no passeio seria diferente.

Essa ideia também traz uma sugestão: fazer com que a chance de se aproveitar de um evento de sorte dependa do capital, já que, como argumentado anteriormente, indivíduos com maior quantidade de capital têm acesso a mais recursos. A implementação dessa ideia levaria a um efeito Matthew [10, 11] dentro do modelo, em que os ricos ficam mais ricos e os pobres ficam mais pobres.

### 5.2.4 Resultados preliminares

Frutos deste trabalho já estão começando a se manifestar, na forma de um artigo em colaboração com Ricardo Simão, aluno de doutorado também sob orientação de Lucas Wardil. Nesse artigo, é explicitado mais rigorosamente que o modelo TvL é equivalente a um conjunto de passeios aleatórios independentes, com probabilidades de eventos de sorte  $p_g$  e de azar  $p_b$  calculadas no limite de baixa densidade de eventos (regime em que a superposição de eventos é improvável). Além disso, o artigo explora o fenômeno do talento crítico, que se torna mais explícito quando as probabilidades  $p_g$  e  $p_b$  são diferentes.

June 28, 2021 13:8 WSPC/INSTRUCTION FILE output

Advances in Complex Systems  
© World Scientific Publishing Company

### The Talent vs Luck model as an ensemble of random walks

Ricardo Simão\*

*Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte, MG CEP 31270-901, Brazil  
summernightdream@fis.grad.ufmg.br*

Francisco Rosendo

*Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte, MG CEP 31270-901, Brazil  
frma059@gmail.com*

Lucas Wardil

*Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte, MG CEP 31270-901, Brazil  
wardil@fisica.ufmg.br*

Received (received date)

Revised (revised date)

The role of luck on individual success is hard to be investigated empirically. Simplified mathematical models are often used to shed light on the subtle relations between success and luck. Recently, results based on a simple model called “Talent versus Luck” model claimed that the most successful individual can be just an average talented individual that is subjected to a very fortunate sequence of events. Here, we show that the original TvL model is equivalent to an ensemble of random walks. We show that the original conclusions are just the consequence of the normal distribution of talents, which creates a large number of average talented individuals, and the low number of steps considered, which allows the observation of large fluctuations. We also show that the results strongly depend on the critical value of the talent. Lastly, we considered two variations of the original model to better explore the role of talent in obtaining success.

*Keywords:* success; talent; luck; random walk.

#### 1. Introduction

How important is luck in achieving success? This question is at the core of the meritocratic system. The role of talent is not under dispute, but the role of luck must be taken into account to have a proper evaluation of anyone’s success [1–3].

Mathematical models can highlight subtle relations between success and luck. The need for mathematical models is more evident because probabilistic concepts

\*Corresponding author



## Referências

- [1] D., Hardoon: *An economy for the 99 percent*. Oxfam GB, Oxford, UK, 2017. Citado na página 11.
- [2] PLUCHINO, ALESSANDRO, ALESSIO EMANUELE BIONDO e ANDREA RAPI-SARDA: *TALENT VERSUS LUCK: THE ROLE OF RANDOMNESS IN SUCCESS AND FAILURE*. *Advances in Complex Systems*, 21(03n04):1850014, May 2018, ISSN 1793-6802. <http://dx.doi.org/10.1142/S0219525918500145>. Citado 4 vezes nas páginas 11, 13, 37 e 47.
- [3] Denrell J., Liu C. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 109:24, 2012. Citado na página 11.
- [4] Taleb, Nassim Nicholas: *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*. Random House, 2007. Citado na página 11.
- [5] Roese, Neal J. e Kathleen D. Vohs: *Hindsight Bias*. *Perspectives on Psychological Science*, 7(5):411–426, 2012. Citado na página 12.
- [6] Newman, MEJ: *Power laws, Pareto distributions and Zipf's law*. *Contemporary Physics*, 46(5):323–351, Sep 2005, ISSN 1366-5812. <http://dx.doi.org/10.1080/00107510500052444>. Citado na página 13.
- [7] Hughes, Barry D.: *Random Walks and Random Environments*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1995. Citado na página 21.
- [8] Pearson, Karl e Jonh Blakeman: *A Mathematical Theory of Random Migration*. Dulau & Co., 1906. Citado na página 21.
- [9] von Smoluchowski, M.: *Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen*. *Annalen der Physik*, 326(14):756–780, janeiro 1906. Citado na página 21.
- [10] Merton, Robert K.: *The Matthew Effect in Science*. *Science*, 159(3810):56–63, 1968, ISSN 0036-8075. <https://science.sciencemag.org/content/159/3810/56>. Citado na página 50.
- [11] Petersen, Alexander M., Woo Sung Jung, Jae Suk Yang e H. Eugene Stanley: *Quantitative and empirical demonstration of the Matthew effect in a study of career longevity*. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(1):18–23, Dec 2010, ISSN 1091-6490. <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.1016733108>. Citado na página 50.