Capítulo 9

Colisões

Recursos com copyright incluídos nesta apresentação:

http://phet.colorado.edu

Chaves | Física Básica - Mecânica

Capítulo
9

Definiremos colisão como uma interação com duração limitada entre dois corpos.

Em uma colisão, a força externa resultante que atua sobre os corpos poderá ser desprezada em relação às forças envolvidas na colisão.

Conservacão do momento linear

Analisaremos situações em que se considera $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$, assim o momento linear total do sistema se conserva ($\mathbf{P}$ é constante).

$$\Rightarrow \mathbf{P}_f = \mathbf{P}_i$$

Vamos supor que os dois corpos que colidem têm massas m_1 e m_2.

$$\mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} = \mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} \quad \Rightarrow \boxed{m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f} = m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i}}$$

válido para toda colisão

Conservação da energia (colisões elásticas e inelásticas)

A energia total do sistema conserva-se em qualquer colisão. Entretanto, a energia mecânica nem sempre se conserva. Parte da energia cinética pode ser transformada em calor ou deformação, por exemplo.

Colisão elástica é aquela em que a energia mecânica se conserva.

Colisão inelástica é aquela em que a energia mecânica não é conservada.

Balanço de energia mecânica durante uma colisão:

$$K_{1f} + K_{2f} = K_{1i} + K_{2i} - \Delta U$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathrm{v}_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathrm{v}_{2i}^2 - \Delta U}$$

válido para toda colisão

onde ΔU representa a perda de energia mecânica do sistema.

Se $\Delta U > 0$, a energia cinética do sistema diminui com a colisão.

Se $\Delta U = 0$, a energia cinética do sistema não varia e a colisão é elástica.

Se $\Delta U < 0$, a energia cinética do sistema aumenta com a colisão.

Colisões em uma dimensão

Quando duas partículas sofrem uma colisão frontal, todo o movimento, tanto antes quanto depois da colisão, ocorre em uma única direção.

Neste caso as velocidades podem ser manipuladas como escalares.

Exemplo – Uma bola com massa 100 g é atirada com uma velocidade de $5{,}00$ m/s contra outra bola de massa 250 g que se encontra em repouso. Após uma colisão frontal a bola que estava parada adquire uma velocidade igual a $1{,}60$ m/s na mesma direção e sentido da primeira. a) Calcule a velocidade da primeira bola após o choque. b) Analise o balanço energético desta colisão.

a) $$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} \Rightarrow v_{1f} = \frac{m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f}}{m_1} = v_{1i} - \frac{m_2}{m_1} v_{2f}$$

$$\Rightarrow v_{1f} = 5{,}00 \text{ m/s} - \frac{250 \text{ g}}{100 \text{ g}} \text{x} \, 1{,}60 \text{ m/s} = 1{,}00 \text{ m/s}$$

b) $$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} 0{,}100 \text{ kg x } 25{,}0 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 1{,}25 \text{ J}$$

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} 0{,}100 \text{ kg x } (1{,}00)^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 + \frac{1}{2} 0{,}250 \text{ kg x } (1{,}60)^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 0{,}740 \text{ J}$$

$K_f < K_i$, então ocorreu um choque inelástico, pois o sistema perdeu energia mecânica.

Exemplo – Uma bola com massa de 200 g, com velocidade de 20 m/s, colide frontalmente com outra bola com massa de 400 g, em repouso, e na colisão o sistema perde metade de sua energia cinética. Calcule as velocidades das bolas após a colisão.

$$p_{1f} + p_{2f} = p_{1i} \Rightarrow m_1 \mathrm{v}_{1f} + m_2 \mathrm{v}_{2f} = m_1 \mathrm{v}_{1i} \Rightarrow m\mathrm{v}_{1f} + 2m\mathrm{v}_{2f} = m\mathrm{v}_{1i} \qquad (1)$$

$$K_f = \frac{1}{2} K_i \quad \Rightarrow \frac{1}{2} m\mathrm{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2} 2m\mathrm{v}_{2f}^2 = \frac{1}{4} m\mathrm{v}_{1i}^2 \Rightarrow \mathrm{v}_{1f}^2 + 2\mathrm{v}_{2f}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{v}_{1i}^2 \qquad (2)$$

De (1) $\mathrm{v}_{1f} = \mathrm{v}_{1i} - 2\mathrm{v}_{2f}$ (3)

(3) em (2): $(\mathrm{v}_{1i} - 2\mathrm{v}_{2f})^2 + 2\mathrm{v}_{2f}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{v}_{1i}^2 \Rightarrow \mathrm{v}_{1i}^2 - 4\mathrm{v}_{1i}\mathrm{v}_{2f} + 4\mathrm{v}_{2f}^2 + 2\mathrm{v}_{2f}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{v}_{1i}^2$

$$\Rightarrow 12\mathrm{v}_{2f}^2 - 8\mathrm{v}_{1i}\mathrm{v}_{2f} + \mathrm{v}_{1i}^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{v}_{2f} = \frac{2\mathrm{v}_{1i} \pm \mathrm{v}_{1i}}{6} \Rightarrow \mathrm{v}_{2f} = \frac{\mathrm{v}_{1i}}{2} \text{ ou } \mathrm{v}_{2f} = \frac{\mathrm{v}_{1i}}{6}$$

Se $\mathrm{v}_{2f} = \frac{\mathrm{v}_{1i}}{2}, \quad \mathrm{v}_{1f} = 0$ Se $\mathrm{v}_{2f} = \frac{\mathrm{v}_{1i}}{6}, \quad \mathrm{v}_{1f} = \frac{2\mathrm{v}_{1i}}{3}$

a primeira bola não pode ultrapassar a segunda

$$\Rightarrow \mathrm{v}_{2f} = \frac{20 \text{ m/s}}{2} = 10 \text{ m/s}, \quad \mathrm{v}_{1f} = 0$$

Colisão inelástica com máxima perda de energia

Veremos no próximo capítulo (rotações) que podemos descrever o movimento das partículas de um sistema como movimento de translação do centro de massa e movimento das partículas em relação ao centro de massa do sistema.

Definimos colisões como situações em que se considera $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = 0$, assim o momento linear total do sistema se conserva ($\mathbf{P}$ é constante).

Como $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}$, se $\mathbf{P}$ é constante, $\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}$ também o será.

Ou seja, uma colisão pode alterar a velocidade das partículas em relação ao CM, mas não tem como alterar a velocidade do próprio centro de massa do sistema.

Uma colisão com máxima perda de energia será então aquela em que as partículas que compoem o sistema ficam juntas com $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{CM}}$ após a colisão, pois neste caso toda a energia cinética devida ao movimento das partículas em relação ao CM do sistema terá sido perdida.

Vamos considerar a colisão de duas partículas em um referencial onde a partícula 2 está inicialmente parada e a partícula 1 tem $\mathbf{v}_{1i}=\mathbf{v}$.

$$\Rightarrow m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f} = m_1\mathbf{v}$$

No caso de colisão com máxima perda de energia teremos: $\mathbf{v}_{1f} = \mathbf{v}_{2f} = \mathbf{v}_f$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\mathbf{v}_f = m_1\mathbf{v} \quad \Rightarrow \mathbf{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v} \qquad (1)$$

As energias cinéticas inicial e final serão

$$K_i = \frac{1}{2}m_1\mathrm{v}^2 \quad \text{e} \quad K_f = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\mathrm{v}_f^2 \qquad (2)$$

(1) em (2): $K_f = \frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)}\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\mathrm{v}^2 \quad \Rightarrow K_f = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)}\mathrm{v}^2$

A energia perdida pelo sistema será

$$\Delta U = K_i - K_f = \frac{1}{2}m_1\mathrm{v}^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)}\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1^2 + m_1m_2 - m_1^2)}{(m_1+m_2)}\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}\mathrm{v}^2$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}K_i$$

Colisões elásticas em uma dimensão

Vamos considerar duas partículas de massas m_1 e m_2 que sofrem uma colisão elástica frontal em um referencial onde a partícula 2 está inicialmente parada e a partícula 1 tem $v_{1i} = v$.

Devido à conservação do momento linear e da energia mecânica neste caso teremos:

$$\begin{cases} m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v & (1) \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 & (2) \end{cases}$$

← 2 equações com 2 incógnitas, v_{1f} e v_{2f}

De (1) $v_{2f} = \frac{m_1}{m_2}(v - v_{1f})$ (3)

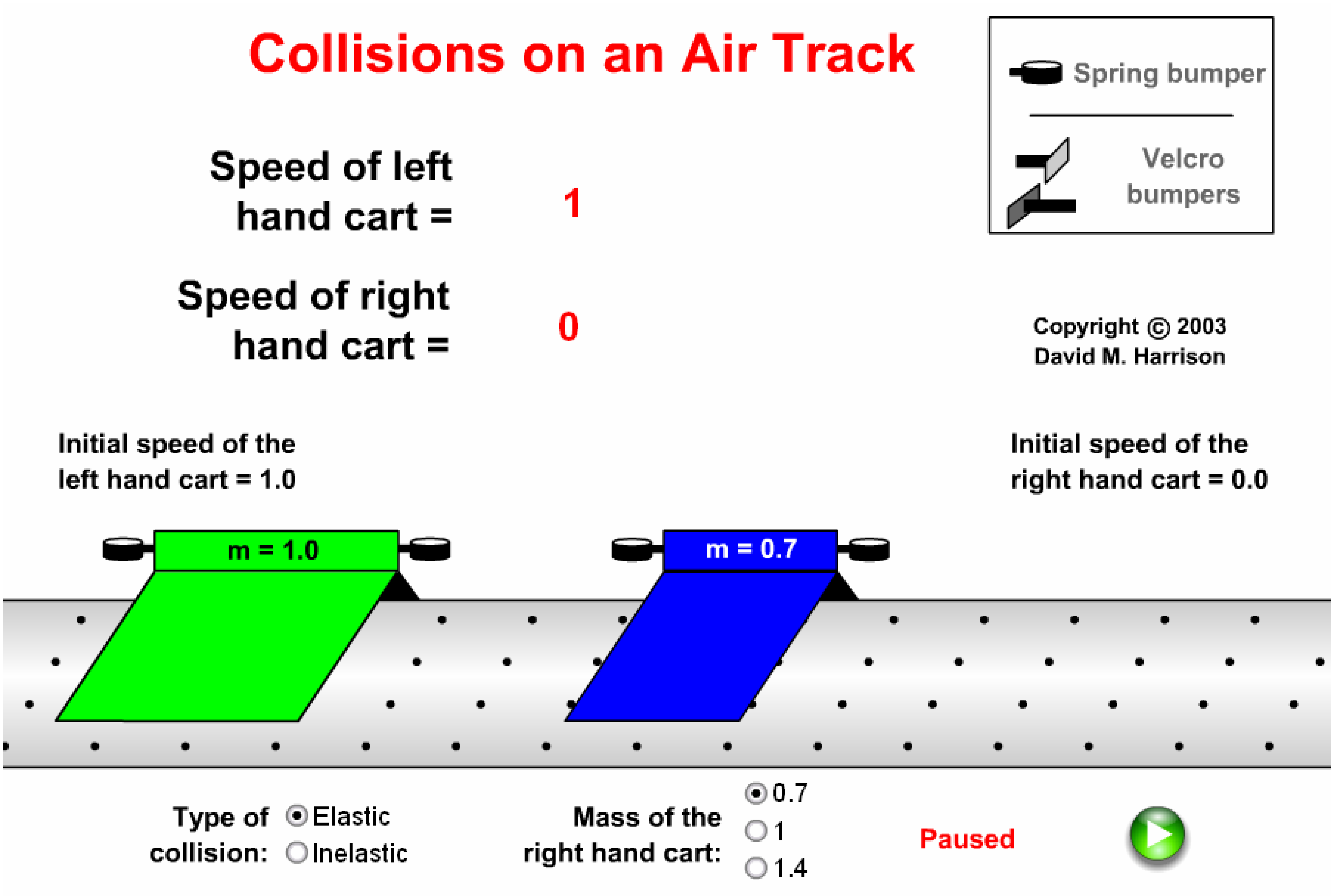
(3) em (2): $\cancel{m_1} v_{1f}^2 + \frac{m_1^{\cancel{2}}}{m_2}(v^2 - 2vv_{1f} + v_{1f}^2) = \cancel{m_1} v^2$

$$\Rightarrow m_2 v_{1f}^2 + m_1 v^2 - 2m_1 vv_{1f} + m_1 v_{1f}^2 = m_2 v^2$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)v_{1f}^2 - 2m_1 vv_{1f} + (m_1 - m_2)v^2 = 0$$

← eq. de 2º grau em v_{1f}

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v \quad \text{e} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v$$



http://phet.colorado.edu

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v \quad \text{e} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v$$

Analisando as equações acima vemos que

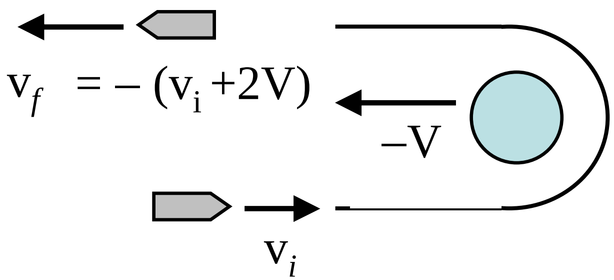
- v_{2f} tem sempre o mesmo sentido de v
- v_{1f} tem o mesmo sentido de v se $m_1 > m_2$
- v_{1f} tem sentido oposto de v se $m_1 < m_2$ ⟵ partícula 1 colide e volta
- $v_{1f} = 0$ e $v_{2f} = v$ se $m_1 = m_2$ ⟵ partícula 1 colide e pára

Casos em que as massas são muito diferentes

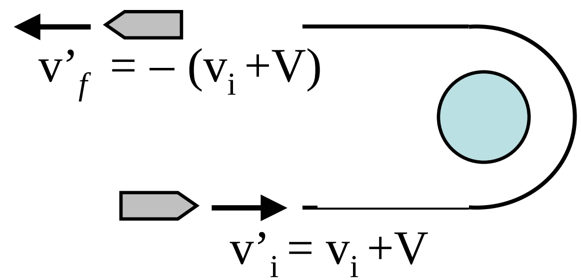
- Se $m_1 << m_2$, $v_{1f} = -v$ e $v_{2f} = 0$ ⟵ bola de sinuca na tabela
- Se $m_1 >> m_2$, $v_{1f} = v$ e $v_{2f} = 2v$ ⟵ carro que colide com pedestre

A colisão de dois corpos de massas muito diferentes pode ser usada para aumentar a velocidade de uma nave ao passar perto de um planeta.

No referencial da Terra



No referencial do planeta



Vista da Terra, a nave se aproxima do planeta com velocidade oposta à do planeta.

A nave contorna o planeta sob o efeito da gravidade deste e retorna na direção oposta àquela em que se aproximou do planeta.

Trata-se de uma colisão como definimos no começo do capítulo, ela é elástica e pode ser tratada como unidimensional.

No referencial do planeta (partícula 2 inicialmente parada, como as eqs. que deduzimos), a nave tem velocidade inicial $v'_i = v_i + V$.

Como $m_1 << m_2$, $v'_f = -v'_i = -(v_i + V)$ e a velocidade do planeta não se altera.

No referencial da Terra, a nave retorna com velocidade $v_f = v'_f - V = -(v_i + 2V)$.

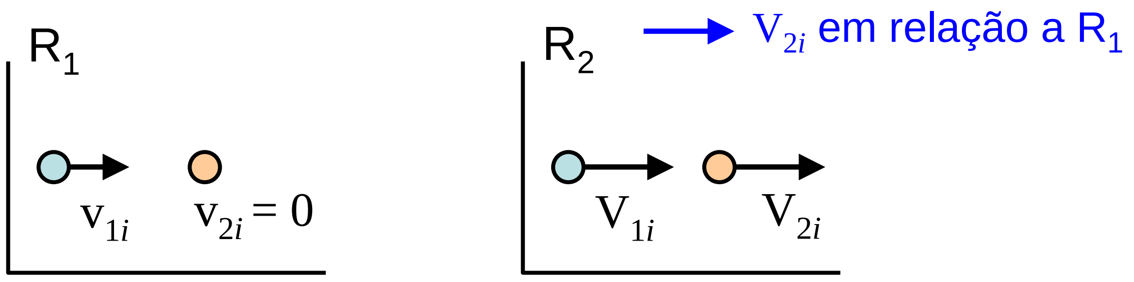
Analisamos colisões elásticas em uma dimensão para situações em que $v_{2i}=0$.

Neste caso as velocidades finais das partículas são dadas por

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1i} \qquad (1)$$

Para situações em que ambas as partículas estão inicialmente em movimento, basta mudar o referencial das equações acima.

Seja R_1 o referencial onde $v_{2i} = 0$ e R_2 um referencial onde a partícula 2 tem velocidade V_{2i}. O referencial R_2 tem velocidade V_{2i} em relação a R_1.



As velocidades medidas em R_1 (v_n) relacionam-se com as medidas em R_2 (V_n):

$$v_n = V_n - V_{2i}$$

Vamos usar esta transformação nas equações (1)

Em R_1:

$$\mathrm{v}_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\mathrm{v}_{1i} \quad \text{e} \quad \mathrm{v}_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}\mathrm{v}_{1i}$$

As velocidades medidas em R_1 (v_n) relacionam-se com as medidas em R_2 (V_n):

$$\mathrm{v}_n = \mathrm{V}_n - \mathrm{V}_{2i}$$

Em R_2:

$$\mathrm{V}_{1f} - \mathrm{V}_{2i} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(\mathrm{V}_{1i} - \mathrm{V}_{2i}) \quad \Rightarrow \boxed{\mathrm{V}_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathrm{V}_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\mathrm{V}_{2i}}$$

$$\mathrm{V}_{2f} - \mathrm{V}_{2i} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(\mathrm{V}_{1i} - \mathrm{V}_{2i}) \quad \Rightarrow \boxed{\mathrm{V}_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\mathrm{V}_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\mathrm{V}_{1i}}$$

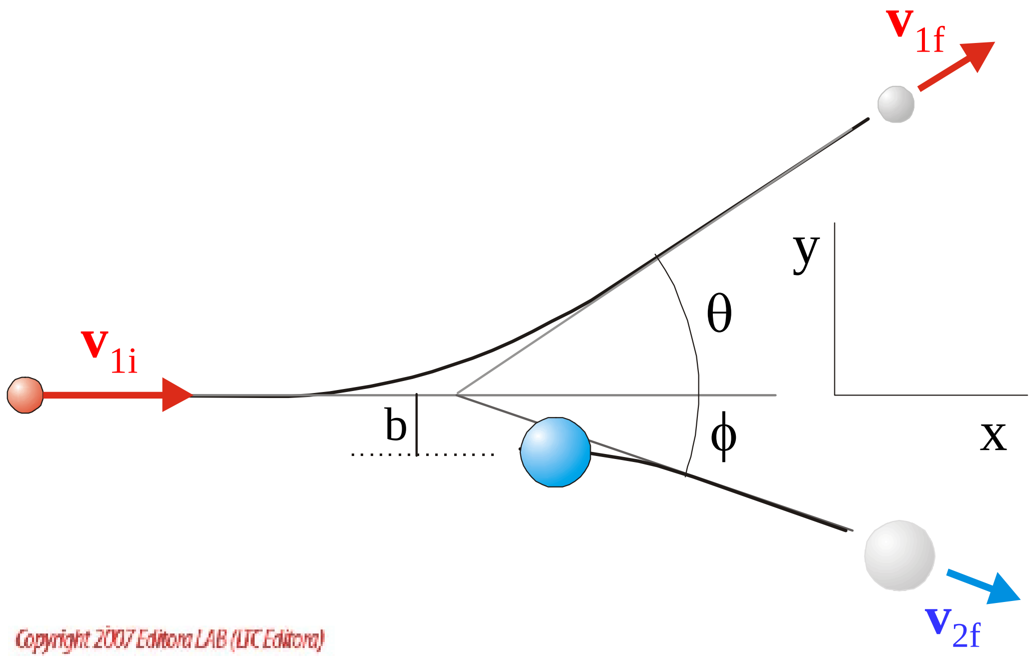
Velocidades das duas partículas após a colisão em
um referencial (R_2) onde ambas têm velocidade inicial.

Colisões elásticas em duas dimensões

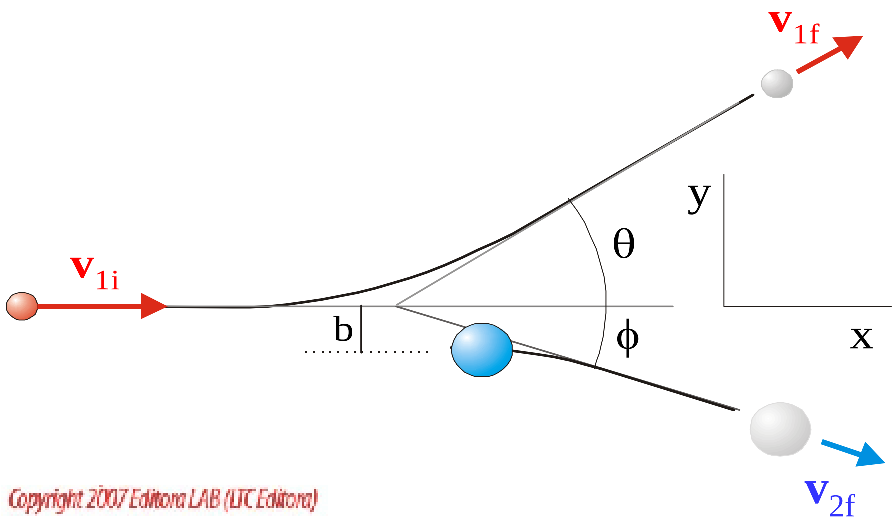
No caso geral de colisão entre duas partículas, o evento ocorre em três dimensões.

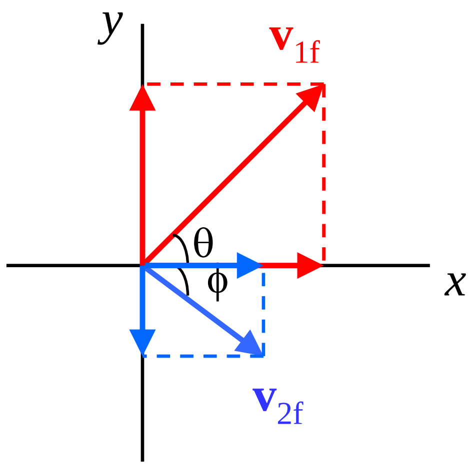
Se a segunda partícula estiver inicialmente parada, a colisão pode ser descrita em duas dimensões. O movimento inicial da partícula 1 define uma reta e a posição inicial da partícula 2 define um ponto. Os dois juntos definem um plano.

Colisão elástica, não frontal, entre a partícula 1 de massa m_1 e $\mathbf{v}_{1i}=v_{1i}\mathbf{i}$ e a partícula 2 de massa m_2, inicialmente em repouso.



b→parâmetro de impacto
Se b=0, colisão frontal





Usando as leis de conservação da energia e do momento linear temos:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1\mathbf{v}_{1i} = m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f} \quad \begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi & \text{No eixo } x \\ 0 = m_1 v_{1f}\,\mathrm{sen}\,\theta - m_2 v_{2f}\,\mathrm{sen}\,\phi & \text{No eixo } y \end{cases}$$

Temos 4 incógnitas, v_{1f}, v_{2f}, θ, ϕ, e apenas 3 equações.

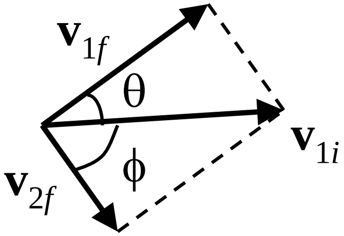
Para resolver o problema, neste caso, uma das incógnitas tem que ser fornecida.

Caso particular: partículas de massas iguais

Neste caso as equações de conservação da energia e do momento tornam-se

$$\mathrm{v}_{1i}^2 = \mathrm{v}_{1f}^2 + \mathrm{v}_{2f}^2$$

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$$



$\mathbf{v}_{1i}$ é a soma vetorial de $\mathbf{v}_{1f}$ e $\mathbf{v}_{2f}$

$\mathrm{v}^2{}_{1i}$ é a soma dos quadrados dos módulos de $\mathbf{v}_{1f}$ e $\mathbf{v}_{2f}$

Pelo teorema de Pitágoras conclui-se que esses três vetores formam um triângulo retângulo e $\mathbf{v}_{1f}$ e $\mathbf{v}_{2f}$ são ortogonais entre si.

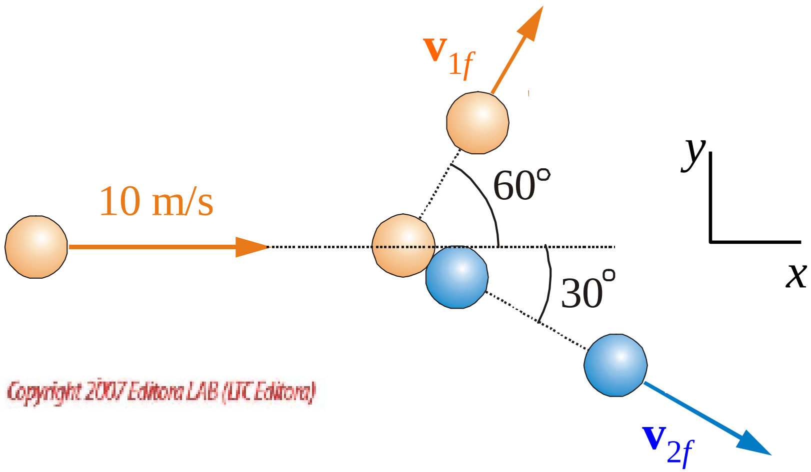
$$\Rightarrow \theta + \phi = \frac{\pi}{2}$$

Com esta condição extra é possivel resolver o sistema de equações de momento e energia e determinar v_{1f}, v_{2f}, θ e ϕ.

Exemplo – Uma bola de sinuca, com velocidade de 10,0 m/s, colide com outra de massa igual, e sua trajetória sofre um desvio de 60º,0. Calcule as velocidades das duas bolas após a colisão.

Partículas de massas iguais e colisão elástica, então $\theta + \phi = \pi/2$.

Como $\theta=60^o$, então $\phi=30^o$.



$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi \\ 0 = m_1 v_{1f} \,\text{sen}\,\theta - m_2 v_{2f}\,\text{sen}\,\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{1i} = \frac{1}{2} v_{1f} + \frac{\sqrt{3}}{2} v_{2f} & (1) \\ 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{1f} - \frac{1}{2} v_{2f} & (2) \end{cases}$$

De (2) $v_{1f} = \frac{\sqrt{3}}{3} v_{2f}$ (3)

(3) em (1)

$$v_{2f} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{1i} = 8,66 \text{ m/s}$$

$$v_{1f} = \frac{\sqrt{3}}{3} v_{2f} = 5,00 \text{ m/s}$$