Capítulo 8

Conservação do momento

Recursos com copyright incluídos nesta apresentação:

Até agora consideramos o movimento de uma única partícula submetida à ação de uma força resultante.

Esta descrição pode ser estendida para o caso de sistemas compostos por um conjunto de partículas. Para fazer isto precisaremos do conceito de momento linear.

O momento linear

O momento linear, $\mathbf{p}$, de uma partícula de massa m e velocidade $\mathbf{v}$ é definido por

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}}$$

A 2ª lei de Newton para uma partícula de massa m, sujeita a uma força $\mathbf{F}$ ou a um conjunto de forças cuja resultante é $\mathbf{F}_R$ nos diz que

$$\boxed{\mathbf{F}_R = \frac{d\mathbf{p}}{dt}}$$

A taxa de variação no tempo do momento linear da partícula é igual à força resultante que atua sobre ela.

Se $\mathbf{F}_R=0$, o momento linear da partícula permanecerá constante ($\mathbf{p}$ se conserva).

A 2ª lei de Newton pode ser usada para calcular a força média sobre uma partícula:

$$\overline{\mathbf{F}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F} dt' = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \frac{d\mathbf{p}}{dt'} dt' = \frac{\mathbf{p}(t+\Delta t) - \mathbf{p}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

Exemplo – Um corpo de massa m é lançado com velocidade v_0 verticalmente para cima, sobe sob a ação da gravidade, chega a uma altura máxima e volta ao seu ponto de partida. Supondo que a ação do atrito possa ser desprezada determine a) variação do momento linear na subida, na descida e total; b) usando a variação total e a definição de momento linear acima determine o tempo total do movimento.

Na subida: $\mathrm{v}_f = 0 \Rightarrow \Delta p_s = m(0 - \mathrm{v}_0) = -m\mathrm{v}_0$

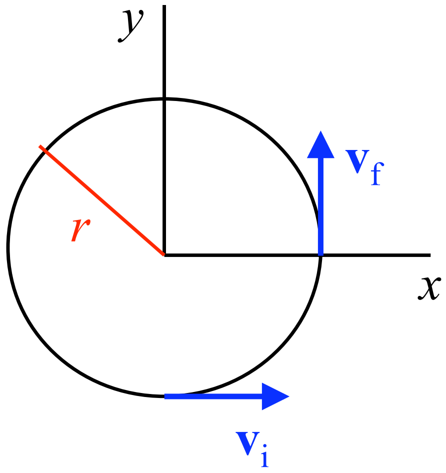
Na descida: $\mathrm{v}_f = -\mathrm{v}_0 \Rightarrow \Delta p_d = m(-\mathrm{v}_0 - 0) = -m\mathrm{v}_0$

No total: $\Delta p = \Delta p_s + \Delta p_d = -2m\mathrm{v}_0$

b) A força que atua no corpo é constante, $\overline{F} = F = -mg$

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow -mg = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = -\frac{\Delta p}{mg} \Rightarrow \Delta t = -\frac{(-2m\mathrm{v}_0)}{mg} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\mathrm{v}_0}{g}$$

Exemplo – Uma partícula de massa m executa movimento circular uniforme com velocidade angular ω e o raio da trajetória é r. Calcule a variação de seu momento linear quando ela percorre um deslocamento angular igual a $\pi/2$. Escolha eixos de coordenadas para expressar o resultado.



$$\mathbf{v}_i = \omega r \mathbf{i} \;\Rightarrow \mathbf{p}_i = m\omega r \mathbf{i}$$

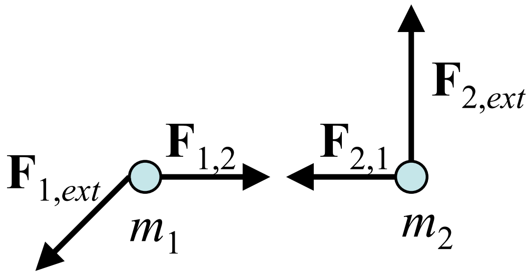
$$\mathbf{v}_f = \omega r \mathbf{j} \;\Rightarrow \mathbf{p}_f = m\omega r \mathbf{j}$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = m\omega r(\mathbf{j} - \mathbf{i})$$

Sistema de duas partículas

Equação de movimento do centro de massa

Vamos considerar um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 que interagem entre si, sujeitas a forças externas $\mathbf{F}_{1,ext}$ e $\mathbf{F}_{2,ext}$, respectivamente.



Podemos analisar o movimento do sistema usando a 2ª lei de Newton para cada partícula:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{1,ext} + \mathbf{F}_{1,2} \quad (1) \qquad\qquad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{2,ext} + \mathbf{F}_{2,1} \quad (2)$$

Essas equações podem ser difíceis de resolver devido às forças internas do sistema.

Se abrirmos mão de ter informação sobre cada partícula, é possível juntar as equações acima em apenas uma que terá informação do sistema como um todo.

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{1,ext} + \mathbf{F}_{1,2} \quad (1) \qquad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{2,ext} + \mathbf{F}_{2,1} \quad (2)$$

Pela 3ª lei de Newton, $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$

Somando (1) com (2):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_{1,ext} + \mathbf{F}_{2,ext}$$

$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}$ → momento linear do sistema

$\boxed{\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_{1,ext} + \mathbf{F}_{2,ext}}$ → força externa total que atua sobre o sistema

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext}} \qquad (3)$$

As equações (1) e (2) se reduzem a (3) que é semelhante à 2ª lei de Newton para uma única partícula.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \quad (3) \qquad \text{onde } \mathbf{P}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2 \text{ e } \mathbf{F}_{ext}=\mathbf{F}_{1,ext}+\mathbf{F}_{2,ext}$$

A equação acima sugere a idéia de representar o sistema todo por uma partícula fictícia de momento $\mathbf{P}$ e massa M igual à massa total do sistema, $M=m_1+m_2$ situada em um ponto que é chamado de **centro de massa**.

O centro de massa do sistema terá velocidade, aceleração e posição dadas por

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \qquad \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M}}$$

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} \qquad \Rightarrow \boxed{\mathbf{a}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2}{M}}$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}\right) = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} \qquad \Rightarrow \boxed{\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}}$$

A equação (3) pode ser expressa como $\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}_{CM}) = M\frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = M\mathbf{a}_{CM}$

$\boxed{\mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{CM}}$ → equação de movimento do CM

Conservação do momento linear

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

Se a soma das forças externas que atuam sobre as duas partículas for nula ($\mathbf{F}_{ext} = 0$), o momento linear do sistema se conserva ($\mathbf{P}$ é constante).

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f \Rightarrow m_1\mathbf{v}_{1,i} + m_2\mathbf{v}_{2,i} = m_1\mathbf{v}_{1,f} + m_2\mathbf{v}_{2,f}$$

Como $\mathbf{v}_{CM,i} = \dfrac{m_1\mathbf{v}_{1,i} + m_2\mathbf{v}_{2,i}}{M} \Rightarrow \mathbf{v}_{CM,i} = \mathbf{v}_{CM,f}$

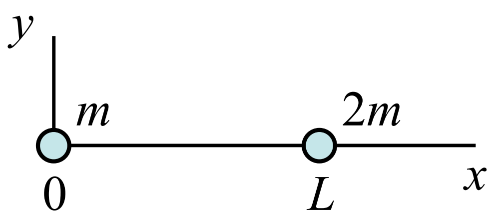
Assim, se $\mathbf{F}_{ext} = 0$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}$ serão constantes.

Caso específico: $\mathbf{F}_{ext} = 0$ e inicialmente $\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}=0$.

Como $\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}$ é constante neste caso, ela será nula sempre e o CM ficará parado.

Assim $\mathbf{r}_{\mathrm{CM}}$ será constante, ou seja, a posição do CM será fixa.

Exemplo - Um sistema é constituído de duas partículas, uma de massa m na posição $(0,0,0)$ e outra de massa $2m$ na posição $(L,0,0)$, como mostra a Figura abaixo. Determine a posição do centro de massa.



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \times 0 + 2m \times L}{m + 2m} = \frac{2}{3} L$$

$y_{CM}=0$ e $z_{CM}=0$, pois $y_1=y_2=z_1=z_2=0$

Exemplo - João e Maria estão sobre patins em uma pista de patinação no gelo. Encontram-se inicialmente parados, separados pela distância de 12 m, cada um segurando uma das extremidades de uma corda. Puxando-se mutuamente pela corda eles se aproximam um do outro. Sabendo-se que as massas de João e Maria são respectivamente 80 kg e 60 kg, determine o ponto em que eles se encontrarão.

Desprezando o atrito, $\Sigma \mathbf{F}_{ext}=0$, então $\mathbf{v}_{CM}$ será constante. Como $\mathbf{v}_{CM,i}=0$, $\mathbf{v}_{CM,f}=0$.

Assim, $\mathbf{r}_{CM}$ será constante. Quando o casal se encontrar, $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}=\mathbf{r}_{CM}$:

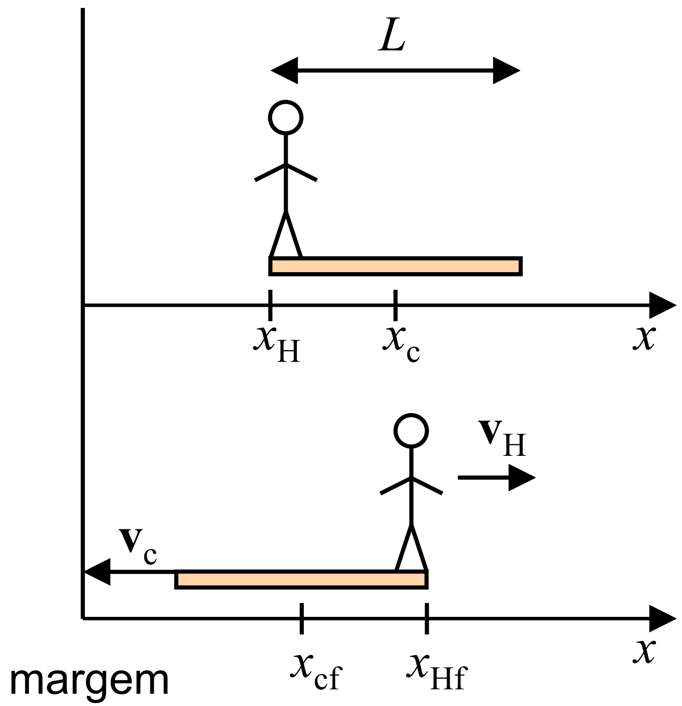
$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{r} + m_2\mathbf{r}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}\mathbf{r} = \mathbf{r}$$

Seja $x=0$ a posição inicial de João.

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{80 \text{ kg} \times 0 \text{ m} + 60 \text{ kg} \times 12 \text{ m}}{80 \text{ kg} + 60 \text{ kg}} = 5{,}1 \text{ m}$$ da posição inicial de João.

Exemplo – Um homem com massa de M=70 kg está parado na extremidade de uma canoa também parada, cuja massa é de m=60 kg, e cujo comprimento é de 4,0 m. Ele corre até a outra extremidade e salta na água com velocidade de 2,0 m/s na direção horizontal. (a) Com que velocidade recua a canoa? (b) De quanto a canoa recua até o instante do salto? (c) Quais seriam as respostas anteriores se em vez de saltar o homem parasse na extremidade oposta de onde estava inicialmente?

Desprezando o atrito, $\Sigma\mathbf{F}_{ext}=0$, então $\mathbf{v}_{CM}$ será constante. Como $\mathbf{v}_{CM,i}=0$, $\mathbf{v}_{CM,f}=0$.



a)

$$v_{CM} = \frac{Mv_H + mv_c}{M+m} = 0 \quad \Rightarrow Mv_H + mv_c = 0$$

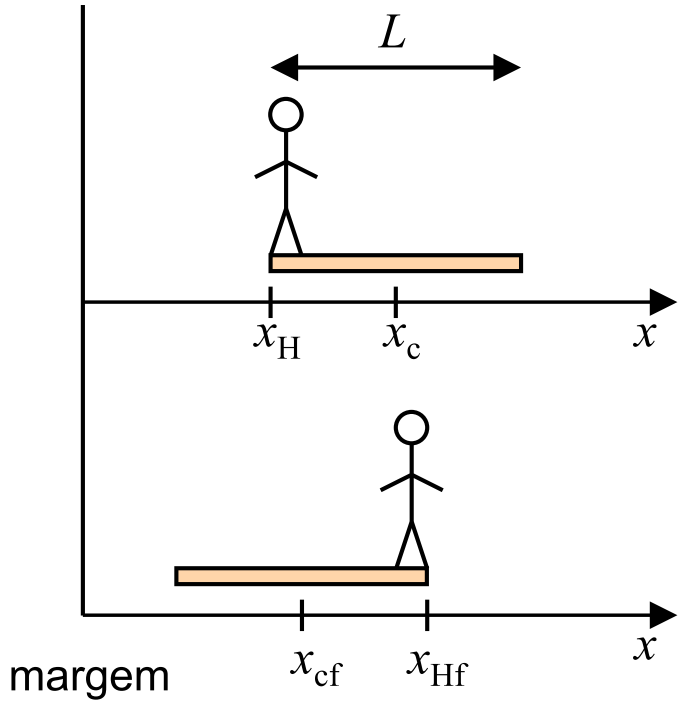
$$\Rightarrow v_c = -\frac{Mv_H}{m} = -\frac{70 \text{ kg x } 2{,}0 \text{ m/s}}{60 \text{ kg}}$$

$$\Rightarrow v_c = -2{,}3 \text{ m/s}$$

b) De quanto a canoa recua até o instante do salto?

Desprezando o atrito, $\Sigma \mathbf{F}_{ext}=0$, então $\mathbf{v}_{CM}$ será constante. Como $\mathbf{v}_{CM,i}=0$, $\mathbf{v}_{CM,f}=0$.

Assim, x_{CM} será constante e $x_{CM,i}=x_{CM,f}$.



$$x_{CM,i} = \frac{Mx_H + mx_c}{M+m}$$

Sendo Δx o deslocamento da canoa em relação à margem ($\Delta x = x_{cf} - x_c$).

$$x_{CM,f} = \frac{M(x_H + L + \Delta x) + m(x_c + \Delta x)}{M+m}$$

$$\Rightarrow \frac{Mx_H + mx_c}{M+m} = \frac{M(x_H + L + \Delta x) + m(x_c + \Delta x)}{M+m}$$

$$\Rightarrow \cancel{Mx_H} + \cancel{mx_c} = \cancel{Mx_H} + ML + M\Delta x + \cancel{mx_c} + m\Delta x$$

$$\Rightarrow (M+m)\Delta x = -ML \quad \Rightarrow \Delta x = -\frac{mL}{(M+m)}$$

$$\Rightarrow \Delta x = -\frac{60\text{ kg x }4,0\text{ m}}{60\text{ kg} + 80\text{ kg}} = -2,2\text{ m}$$

c) Quais seriam as respostas anteriores se em vez de saltar o homem parasse na extremidade oposta de onde estava inicialmente?

Desprezando o atrito, $\Sigma \mathbf{F}_{ext}=0$, então $\mathbf{v}_{CM}$ será constante. Como $\mathbf{v}_{CM,i}=0$, $\mathbf{v}_{CM,f}=0$.

$$v_{CM} = \frac{Mv_H + mv_c}{M+m} = 0 \Rightarrow Mv_H + mv_c = 0$$

Se o homem não saltasse, sua velocidade final em relação à canoa seria nula ($v_H=0$).

$$\Rightarrow v_c = 0$$

O deslocamento da canoa continuaria sendo

$$\Delta x = -\frac{mL}{(M+m)} = -2,2 \text{ m}$$

Sistemas com um número qualquer de partículas

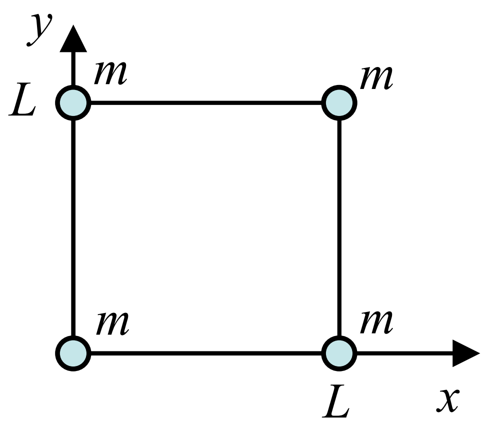
Centro de massa

Consideremos o sistema constituído de N partículas i, $i=1,2,3,...,N$, cujas massas são m_i. O centro de massa do sistema é o ponto definido pelo vetor

$$\boxed{\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}$$

onde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ é a massa total do sistema.

Exemplo – Calcule o centro de massa de um sistema de quatro partículas iguais dispostas nos vértices de um quadrado de lado L.



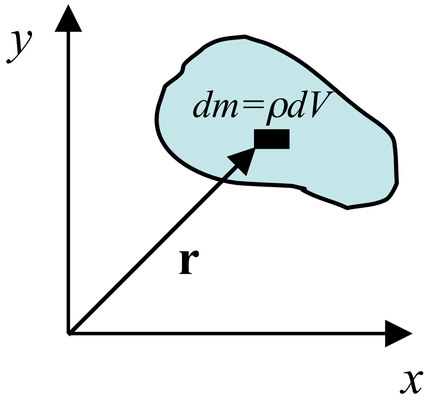
$$x_{CM} = \frac{1}{4m}(0+0+mL+mL) = \frac{L}{2}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{4m}(0+mL+mL+0) = \frac{L}{2}$$

O CM coincide com o centro geométrico do quadrado.

Se o sistema em análise for um corpo extenso, é mais conveniente tratá-lo como um corpo contínuo.

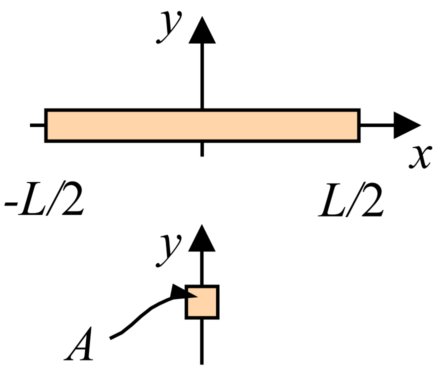
As partículas de massa m_i são substituídas por células infinitesimais de massas $dm=\rho\, \mathrm{d}V$, onde dV é o volume da célula e ρ é a densidade no ponto $\mathbf{r}$, onde se situa a célula.



$$\boxed{\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\rho\, dV}$$

onde $M = \int dm = \int \rho\, dV$ é a massa total do corpo.

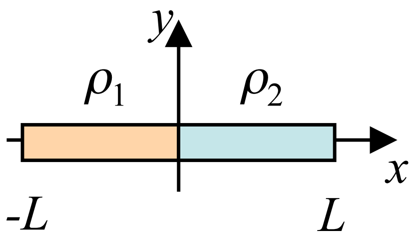
Exemplo – Uma barra de densidade uniforme e igual a ρ tem seção ortogonal de área uniforme A e comprimento L. Determine a distância, ao longo da barra, do seu centro de massa a uma das extremidades.



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int x\rho\, dV = \frac{\rho}{M}\int_{-L/2}^{L/2} xA\,dx = \frac{\rho A}{M}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = 0$$

O CM está no centro da barra à distância $L/2$ das extremidades.

Exemplo – Duas barras de mesmo comprimento L e mesma seção ortogonal de área uniforme A, com densidades uniformes ρ_1 e ρ_2, são soldadas de modo a compor uma barra de comprimento $2L$, como mostra a Figura abaixo. Determine a posição do centro de massa da barra composta.



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int x\rho\,dV = \frac{1}{M}\int_{-L}^{L} x\rho A\,dx$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_{-L}^{0} x\rho_1 A\,dx + \frac{1}{M}\int_{0}^{L} x\rho_2 A\,dx \overset{*}{=} \frac{\rho_1 A}{M}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-L}^{0} + \frac{\rho_2 A}{M}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{L} = -\frac{\rho_1 A}{M}\frac{L^2}{2} + \frac{\rho_2 A}{M}\frac{L^2}{2}$$

$$x_{CM} = \frac{A}{M}\frac{L^2}{2}(\rho_2 - \rho_1) \quad (1) \qquad \text{Mas} \quad M = M_1 + M_2 = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = (\rho_1 + \rho_2)AL \quad (2)$$

(2) em (1): $$x_{CM} = \frac{AL^2}{2AL}\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 + \rho_1)} \Rightarrow x_{CM} = \frac{L}{2}\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 + \rho_1)}$$

* Solução alternativa:

$$x_{CM} = \frac{M_1}{M}\underbrace{\int_{-L}^{0}\frac{1}{M_1}x\rho_1 A\,dx}_{x_{CM1}} + \frac{M_2}{M}\underbrace{\int_{0}^{L}\frac{1}{M_2}x\rho_2 A\,dx}_{x_{CM2}} = \frac{1}{M}\left(M_1 x_{CM1} + M_2 x_{CM2}\right)$$

* Solução alternativa – continuação:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\left(M_1 x_{CM1} + M_2 x_{CM2}\right) = \frac{1}{M}\left(\frac{-M_1 L}{2} + \frac{M_2 L}{2}\right)$$

$$x_{CM} = \frac{L}{2M}(M_2 - M_1) = \frac{L}{2}\frac{(M_2 - M_1)}{(M_2 + M_1)} = \frac{L}{2}\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 + \rho_1)}\frac{V}{V}$$

$$\Rightarrow x_{CM} = \frac{L}{2}\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 + \rho_1)}$$ como obtido anteriormente.

A equação $x_{CM} = \frac{1}{M}(M_1 x_{CM1} + M_2 x_{CM2})$ diz que, sabendo-se as posições dos CM de duas partes com massas M_1 e M_2 de um sistema, podemos considerar estas massas concentradas em seus respectivos centros de massas e usar a equação para o CM de um sistema de duas partículas para encontrar o CM do sistema completo.

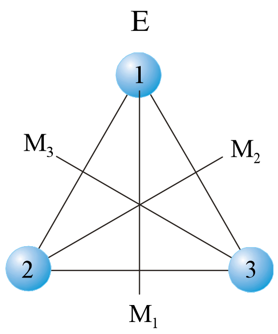
Esta é uma regra geral. Vale para mais do que uma dimensão e também para sistemas compostos de várias partes ao invés de apenas duas.

Simetria

Operação de simetria sobre um sistema é qualquer operação após a qual o sistema pareça exatamente o mesmo.

Sejam três bolinhas idênticas dispostas nos vértices de um triângulo equilátero.

Este sistema tem seis operacões de simetria, que são mostradas na figura abaixo.



Se uma operação de simetria for feita sem que você veja, você não será capaz de perceber que o sistema foi mudado.

Simetria no cálculo de centro de massa

Quando efetuamos uma operação de simetria sobre um determinado corpo, estamos simplesmente permutando suas partículas.

Neste caso, o somatório da equação abaixo que exprime a posição do CM sofrerá um mero rearranjo de seus termos e permanecerá com resultado inalterado.

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$ → Posição do CM para um sistema de N partículas

O mesmo argumento pode ser estendido para a integral da equação abaixo.

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm$$ → Posição do CM para um corpo extenso

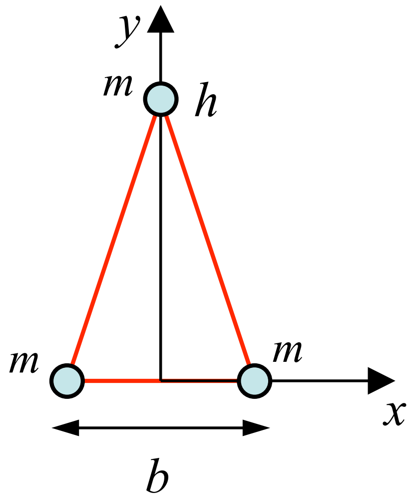
Ou seja, uma operação de simetria de um sistema não pode deslocar o seu CM.

Se a operação de simetria for uma rotação, os únicos pontos fixos estão sobre o eixo de rotação. Logo, se um sistema possuir um eixo de simetria, o seu CM necessariamente se situa sobre tal eixo

Se o sistema possuir dois eixos de simetria, o CM se situa na interseção dos eixos.

Exemplo - Determine o centro de massa dos seguintes sistemas com o auxílio de argumentos de simetria:

a) três bolinhas idênticas, com massa m cada, formando um triângulo isósceles de altura h e base de comprimento b.

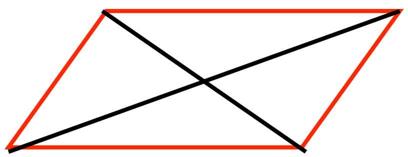


Uma operação de rotação pelo eixo y deixará o sistema invariante. O eixo y é então um eixo de simetria e o CM do sistema situa-se sobre este eixo. Assim $x_{CM}=0$.

As duas bolinhas que estão no eixo x têm seu CM em $y=0$, pois o eixo y é um eixo de simetria do sistema composto pelas duas bolinhas.

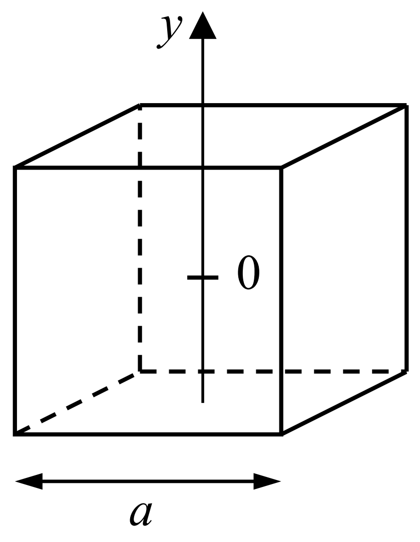
Logo teremos: $$y_{CM} = \frac{2m \times 0 + m \times h}{3m} = \frac{h}{3}$$

b) uma chapa com espessura e densidade uniformes, cortada no formato de um paralelogramo não-reto



As duas diagonais são eixos de simetria, assim o CM encontra-se na interseção das diagonais.

c) uma caixa cúbica de lado a, com paredes de mesma espessura e mesmo material, sem a tampa superior.



A caixa fica invariante a rotacões de $\pi/2$ em torno do eixo y, perpendicular à base e ao quadrado da tampa ausente, passando pelos seus centros.

Logo, y é um eixo de simetria e o CM do sistema situa-se sobre ele.

Escolhemos o centro da caixa como a origem das coordenadas.

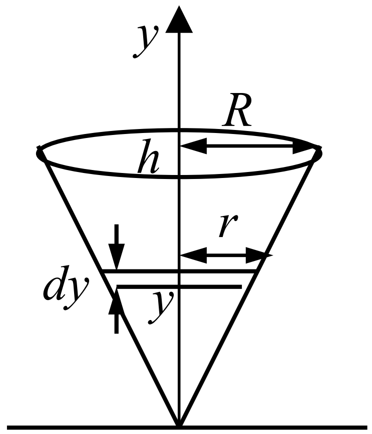
O CM de cada face está em seu centro de simetria.

Para as faces laterais, isto corresponde a $y=0$ e para a face inferior a $y=-a/2$.

Supondo que cada face tenha massa m, o CM da caixa cúbica sem tampa superior será então:

$$y_{CM} = \frac{4m \text{ x } 0 + m \text{ x } (-a/2)}{5m} = -\frac{a}{10}$$

Exemplo - Determine o centro de massa de um cone homogêneo de base circular de raio R e altura h.



O cone tem densidade uniforme (é homogêneo), assim seu CM estará em algum ponto do eixo de simetria (y).

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{\rho V}\int y\rho\,dV = \frac{1}{V}\int y\,dV$$

Mas $dV=\pi r^2 dy$. $\Rightarrow y_{CM} = \frac{\pi}{V}\int_0^h r^2 y\,dy$ (1)

Como r varia em função de y, por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{r}{R} = \frac{y}{h} \quad \Rightarrow r = \frac{R}{h}y \quad (2)$$

(2) em (1): $$y_{CM} = \frac{\pi}{V}\int_0^h \left(\frac{R}{h}y\right)^2 y\,dy = \frac{\pi R^2}{Vh^2}\int_0^h y^3 dy = \frac{\pi R^2}{Vh^2}\left(\frac{y^4}{4}\right)_0^h = \frac{\pi R^2}{Vh^2}\frac{h^4}{4} = \frac{\pi R^2 h^2}{4V}$$

Como $dV=\pi r^2 dy \Rightarrow dV = \pi\left(\frac{R}{h}y\right)^2 dy \Rightarrow V = \pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h y^2 dy = \frac{\pi R^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$$\Rightarrow y_{CM} = \frac{\pi R^2 h^2}{4}\frac{3}{\pi R^2 h} = \frac{3}{4}h$$

Equação de movimento do CM para um sistema com número qualquer de partículas

Para um sistema com número qualquer de partículas vimos que

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$

onde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ é a massa total do sistema.

A velocidade do centro de massa será

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \Rightarrow M\mathbf{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$$

Sendo $\mathbf{P}$ o momento linear total do sistema, $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM}}$$

O momento linear total de um sistema de partículas é o produto de sua massa total pela velocidade do seu centro de massa.

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = M\mathbf{v}_{CM} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i \qquad \text{(2ª lei de Newton)}$$

As forças que atuam sobre as partículas podem ser separadas em forças externas e internas.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_{i,int} + \sum_i \mathbf{F}_{i,ext}$$

As forças internas ocorrem em pares de ação e reação (3ª lei de Newton).

$$\Rightarrow \sum_i \mathbf{F}_{i,int} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (2) \qquad \text{onde } \boxed{\mathbf{F}_{ext} = \sum_i \mathbf{F}_{i,ext}}$$

De (1): $\dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = M\dfrac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt}$ (3)

(2)=(3) $\Rightarrow \boxed{M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_{ext}}$ → Equação de movimento do CM de um sistema de partículas

Conservação do momento linear

Se o sistema de partículas for isolado (não há força externa atuando sobre ele), ou se a soma das forças externas que atuam sobre um sistema de partículas for nula, seu momento linear total será conservado.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \text{constante}$$

Neste caso, $M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P} = \text{constante} \quad \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} = \text{constante}$

Assim, se a resultante das forças externas que atuam sobre um sistema for nula, seu momento linear total se conserva e seu centro de massa terá velocidade constante. Ou seja, seu CM se manterá em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

Exemplo - Um avião, cuja massa vale $10.000\ \mathrm{kg}$, viaja com velocidade $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i}\ 400\ \mathrm{km/h}$ quando explode em três pedaços. Imediatamente após a explosão, o primeiro fragmento, com massa de $3.000\ \mathrm{kg}$, tem velocidade $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i}\ 800\ \mathrm{km/h}$; o segundo fragmento, com massa de $5.000\ \mathrm{kg}$, tem velocidade $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{j}+\mathbf{k})\ 200\ \mathrm{km/h}$. Qual é a velocidade do terceiro fragmento logo após a explosão?

Na explosão, que somente envolve forças internas, o momento linear do sistema se conserva.

Antes da explosão: $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_0$

Após a explosão: $\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3$

$$\Rightarrow M\mathbf{v}_0 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \frac{M\mathbf{v}_0 - m_1\mathbf{v}_1 - m_2\mathbf{v}_2}{m_3} = (800\mathbf{i} - 500\mathbf{j} - 500\mathbf{k})\ \mathrm{km/h}$$

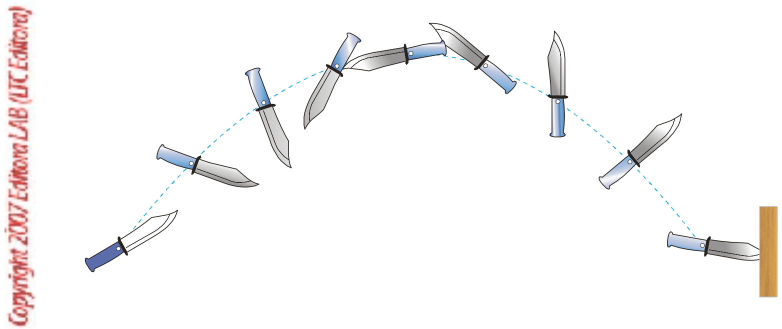
Sistema de partículas sob a ação de forças externas

Vimos que a equação de movimento do CM de um sistema de partículas é dada por

$$M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_{ext} \quad \text{onde} \quad \mathbf{F}_{ext} = \sum_i \mathbf{F}_{i,ext}$$

Assim, a aceleração do CM do sistema só depende de sua massa total e da força externa resultante que atua sobre o sistema.

Se atiramos uma faca ao alvo, a faca gira em torno de seu CM, que percorre uma trajetória parabólica

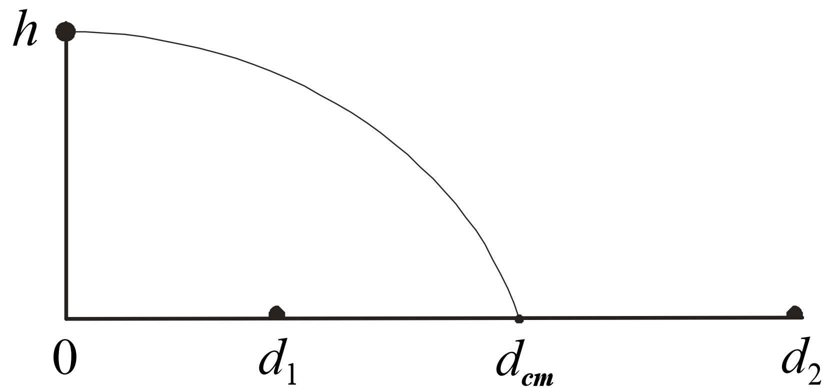


Isto acontece pois a soma das forças externas que atuam sobre cada pedaço da faca é igual a $M\mathbf{g}$, onde M é a massa da faca e $\mathbf{g}$ a aceleração da gravidade.

$$\Rightarrow M\mathbf{a}_{CM} = M\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{g}$$

O CM segue a parábola característica de um projétil de massa M.

Exemplo - Um avião voa na horizontal à altitude h=500 m com velocidade v_0=360 km/h quando se parte em duas partes de massas iguais. Um dos fragmentos do avião cai em um ponto 300 m à frente do ponto da explosão. Os dois fragmentos atingem o solo ao mesmo tempo. Ignorando o atrito do ar, determine o ponto onde cai o outro fragmento.



O CM do avião segue uma trajetória parabólica até o momento do impacto dos fragmentos com o solo ($\mathbf{a}_{CM}=\mathbf{g}$). No impacto:

$$v_y = v_{0y} - gt_q \quad \text{e} \quad v_y^2 = v_{0y}^2 + 2gh \quad (1)$$

Como $v_{0y}=0$, $v_y = -gt_q \Rightarrow v_y^2 = g^2t_q^2$ (2)

(2) em (1): $g^2t_q^2 = 2gh \Rightarrow t_q = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ → Tempo de queda dos fragmentos

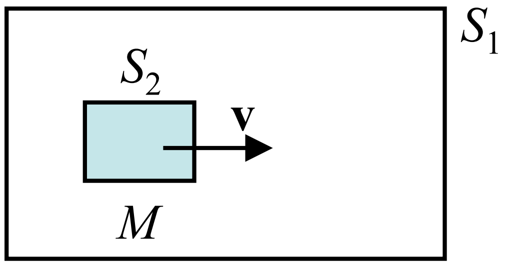
$$x = v_0 t \quad \Rightarrow d_{CM} = v_0 t_q = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad = 1010 \text{ m}$$

$$d_{CM} = \frac{1}{M}(m_1d_1 + m_2d_2) \; = \frac{1}{2m}(md_1 + md_2) \; = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)$$

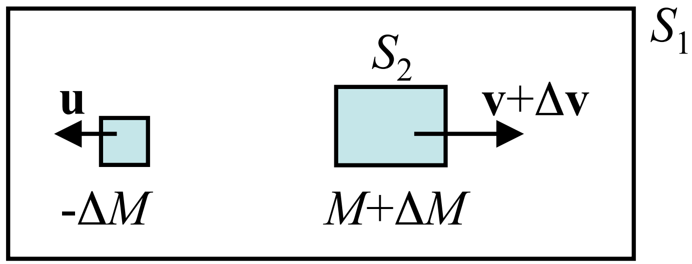
$$\Rightarrow d_2 = 2d_{CM} - d_1 \; = 1720 \text{ m}$$

Sistemas de massa variável – Movimento de foguete

Sejam dois sistemas S_1 e S_2 mostrados na figura abaixo.



instante t



instante $t + \Delta t$

O sistema S_1 tem massa constante e S_2 tem massa variável.

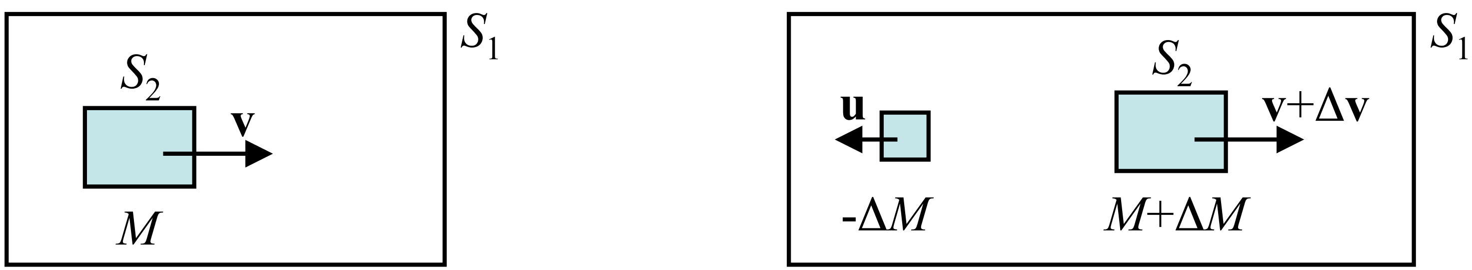
No instante t, o sistema S_2 tem massa M e se move com velocidade $\mathbf{v}$.

No instante $t+\Delta t$, a massa de S_2 variou de ΔM (negativa se for massa ejetada), tendo neste instante massa $M+\Delta M$ e velocidade $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$. A massa ejetada, $-\Delta M$ tem velocidade $\mathbf{u}$, medida no mesmo referencial de $\mathbf{v}$.

Vamos considerar a presença de uma força externa que atua no sistema como um todo. No caso de um foguete pode ser a força da gravidade ou a resistência do ar.

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

onde $\mathbf{P}$ é o momento linear total do sistema S_1



instante t instante $t + \Delta t$

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (1)$$

onde $\mathbf{P}$ é o momento linear total do sistema S_1

No intervalo Δt, a variação do momento linear $\Delta\mathbf{P}$ do sistema S_1 é

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i$$

sendo $\mathbf{P}_i = M\mathbf{v}$ e $\mathbf{P}_f = (M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u}$

$$\Rightarrow \Delta\mathbf{P} = (M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v}$$

De (1): $\mathbf{F}_{ext} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{(M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v}}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{ext} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[M\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})\frac{\Delta M}{\Delta t} + \Delta\mathbf{v}\frac{\Delta M}{\Delta t} \right]$$

Ao se tomar o limite, este termo é bem menor do que os outros dois e pode ser desprezado.

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{F}_{ext} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})\frac{dM}{dt}}$$

$$\mathbf{F}_{ext} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v}-\mathbf{u})\frac{dM}{dt} \quad \Rightarrow M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} - (\mathbf{v}-\mathbf{u})\frac{dM}{dt}$$

No caso do movimento de um foguete, $\mathbf{v}_{rel}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$ é a velocidade de ejeção dos gases em relação ao foguete.

$$\Rightarrow \boxed{M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{v}_{rel}\frac{dM}{dt}} \qquad (2)$$

O último termo da equação acima corresponde à força exercida sobre o foguete pela massa que sai do foguete. Ele é chamado de propulsão do foguete.

Para tornar este termo o maior possível, ao projetar um foguete, tenta-se aumentar tanto $\mathbf{v}_{rel}$ quanto $|dM/dt|$, a taxa de combustão do foguete.

Quando um foguete está livre de forças externas (no espaço longe de outros corpos), a equação (2) torna-se:

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{rel}\frac{dM}{dt} \quad \Rightarrow d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{rel}\frac{dM}{M} \qquad (3)$$

Em um caso geral, a velocidade de ejeção do gás ($\mathbf{v}_{rel}$) pode ter qualquer direção e a equação acima deve ser resolvida vetorialmente.

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{rel}\frac{dM}{M} \qquad (3)$$

Vamos supor por simplicidade que o movimento do foguete seja em uma dimensão. Neste caso, $d\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_{rel}$ são antiparalelas.

$$\Rightarrow d\text{v} = -\text{v}_{rel}\frac{dM}{M}$$

A massa inicial do foguete é M_0 e sua velocidade inicial é v_0. Em um instante t ele terá massa M e velocidade v.

$$\Rightarrow \int_{\text{v}_0}^{\text{v}} d\text{v} = -\text{v}_{rel}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} \quad \Rightarrow \text{v} - \text{v}_0 = -\text{v}_{rel}\ln(M - M_0) \quad \Rightarrow \text{v} = \text{v}_0 + \text{v}_{rel}\ln\frac{M_0}{M} \qquad (4)$$

A taxa de combustão do foguete é $R = -\,dM/dt$

$$\Rightarrow dM = -Rdt \quad \Rightarrow \int_{M_0}^{M} dM = -R\int_0^t dt \quad \Rightarrow M = M_0 - Rt \qquad (5)$$

(5) em (4): $\boxed{\text{v} = \text{v}_0 + \text{v}_{rel}\ln\frac{M_0}{M_0 - Rt}}$

→ Válida até o instante em que acaba o combustível do foguete

Exemplo – O foguete Saturno V, que lançou a nave Apolo 11 em 16/07/1969 no primeiro vôo tripulado à Lua, tinha, no momento de sua arrancada, massa total de 2,77 mil toneladas e seu primeiro estágio, S-IC, levava 1,96 mil toneladas de combustível, que era ejetado à velocidade relativa de 2,58 km/s e à taxa de 12,9 toneladas por segundo. (a) Qual era o empuxo do estágio S-IC? Qual foi a aceleração do foguete (b) logo após seu lançamento e (c) ao esgotar-se o combustível do estágio S-IC? (d) Se não fosse a gravidade da Terra, qual seria a velocidade do foguete ao esgotar-se o combustível do seu primeiro estágio?

a) v_{rel}=2,58 km/s e R=dM/dt=12,9 ton/s

$$F = \mathrm{v}_{rel} R = 12{,}9 \times 10^3\,\mathrm{kg/s} \times 2{,}58 \times 10^3\,\mathrm{m/s} = 3{,}33 \times 10^7\,\mathrm{N}$$

Eq. de movimento do foguete: $F - \underbrace{mg}_{F_{ext}} = ma \Rightarrow a = \dfrac{F}{m} - g$

b) $a = \dfrac{3{,}33 \times 10^7\,\mathrm{N}}{2{,}77 \times 10^6\,\mathrm{kg}} - 9{,}8\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}2\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

c) $a = \dfrac{3{,}33 \times 10^7\,\mathrm{N}}{(2{,}77 - 1{,}96) \times 10^6\,\mathrm{kg}} - 9{,}8\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 31\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

d) Ao esgotar o combustível do 1º estágio, m=(2,77-1,96) x 10^6 kg e sendo v_0=0 m/s.

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_{rel} \ln\frac{m}{m_0} = 2{,}58\ \mathrm{km/s} \times \ln\frac{2{,}77 \times 10^3\,\mathrm{ton}}{0{,}81 \times 10^3\,\mathrm{ton}} = 3{,}17\ \mathrm{km/s}$$

O foguete é um exemplo típico de sistema com massa variável. Ele tem $\mathrm{d}M$ negativo, pois perde massa. Outros sistemas de massa variável podem ganhar massa. Neste caso as equações que deduzimos continuam válidas, mas $\mathrm{d}M$ será positivo.

Exemplo – Um barco a motor de massa igual a $100\ \mathrm{kg}$ está se movendo sobre a superfície de um lago com velocidade constante igual a v=$36\ \mathrm{km/h}$. Repentinamente sofre uma avaria que causa um pequeno buraco na parte da frente de seu casco e água começa a entrar no barco a uma taxa de 12 litros por minuto. Determine a potência extra solicitada ao motor para que o barco continue com a mesma velocidade.

Se a velocidade inicial estava constante, então a força exercida inicialmente pelo motor se igualava em módulo às forças de atrito.

Após a avaria haverá uma força $\mathbf{F}$ exercida pela variação de massa e o motor deverá realizar uma força extra $\Delta\mathbf{F}$ igual e contrária a $\mathbf{F}$.

$$\Delta F = -F = -\mathrm{v}_{rel}\frac{dm}{dt}$$

A velocidade da água em relação ao barco é v_{rel}=-v

$$\Rightarrow \Delta F = \mathrm{v}\frac{dm}{dt} = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times \frac{12\ \mathrm{kg}}{60\ \mathrm{s}} = 2{,}0\ \mathrm{N} \qquad \Rightarrow P = \Delta F\mathrm{v} = 20\ \mathrm{W}$$