Capítulo 7

Trabalho e energia

Recursos com copyright incluídos nesta apresentação:

Trabalho

Na física, trabalho é um termo usado com significado distinto do entendido na linguagem diária.

Trabalho de uma força constante em trajetória reta (força constante tem módulo, direção e sentido constantes, pois força é vetor)

O trabalho realizado por uma força constante $\mathbf{F}$ sobre uma partícula enquanto esta se desloca de uma quantidade $\mathbf{d}$ em linha reta é dado por

$$\boxed{W = \mathbf{F}.\mathbf{d} = Fd\cos\theta}$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\mathbf{F}$ e $\mathbf{d}$.

Exemplo: Uma pessoa caminha em um plano horizontal com velocidade constante, carregando um corpo de peso $P=mg$.

Neste caso, o trabalho realizado pela pessoa é nulo, pois a força $\mathbf{F}$ que ela exerce sobre o corpo de massa m é perpendicular ao deslocamento $\mathbf{d}$ em cada instante.

No SI, a unidade de trabalho é o joule, símbolo J. Um joule é o trabalho realizado por uma força constante de um Newton quando desloca um corpo uma distância de um metro na sua direção e sentido. Portanto

1 J = 1 N x m

Quando a partícula se move sob a ação de várias forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ etc., o trabalho total, ou trabalho líquido, realizado sobre ela é a soma dos trabalhos W_1, W_2, W_3, etc., realizados por cada uma das forças.

$$W_{liq} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3).\mathbf{d} \quad = \mathbf{F}_R.\mathbf{d} = W_R$$

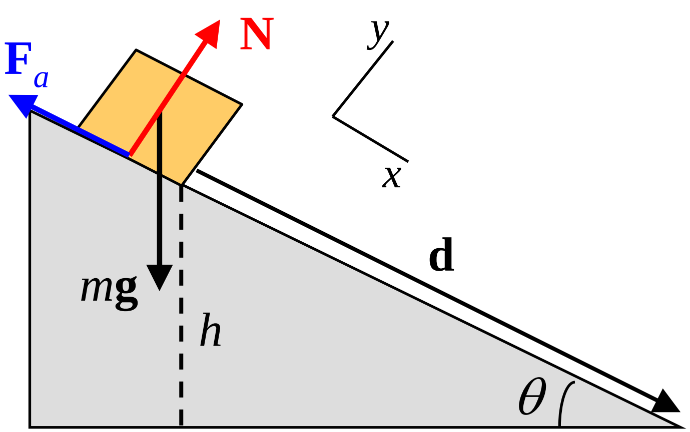
O trabalho líquido é igual ao trabalho da força resultante, $\mathbf{F}_R$, que atua sobre a partícula.

Assim, o trabalho líquido sobre uma partícula em MRU é nulo, pois $\mathbf{a} = 0$ e consequentemente $\mathbf{F}_R = \mathrm{m}\mathbf{a} = 0$.

Exemplo 7.1 – Um bloco de massa m desliza sobre uma rampa fazendo um deslocamento $\mathbf{d}$ cuja componente vertical é h, como mostra a Figura abaixo. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a rampa vale μ.

a) Calcule o trabalho de cada uma das várias forças atuantes sobre o bloco durante o deslizamento.

b) Calcule o trabalho líquido e verifique que ele será nulo quando o corpo descer com velocidade constante.



Forças que atuam no bloco:
peso ($m\mathbf{g}$), normal ($\mathbf{N}$) e força de atrito ($\mathbf{F}_a$).

$$W_P = \mathbf{P.d} = Pd\cos(\pi/2 - \theta) = mgd\,\text{sen}\,\theta = mgh$$

$$W_N = \mathbf{N.d} = Nd\cos(\pi/2) = 0$$

$$W_{fa} = \mathbf{f}_a.\mathbf{d} = f_a d\cos\pi = -\mu_c Nd = -\mu_c mg\cos(\theta)d$$

$$W_{liq} = W_P + W_N + W_{fa} = mgh - \mu_c mg\cos(\theta)d \quad (1)$$

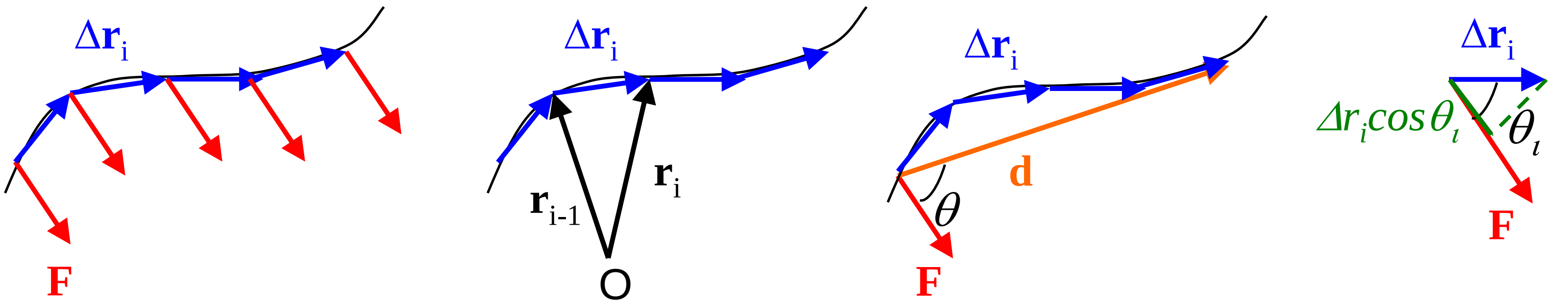
Se o corpo descer com velocidade constante, $a_x = 0$

$$\Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_c mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta = \mu_c mg\cos\theta \quad (2)$$

(2) em (1) e sabendo que $h = d\,\text{sen}\,\theta$

$$W_{liq} = mgh - mgsen(\theta)d = mgh - mgh = 0$$

Trabalho realizado por uma força constante **F** em uma trajetória curvilínea



Sabemos calcular o trabalho de uma força constante em linha reta.

Aproximamos então a trajetória curva por uma sequência de passos retilíneos $\Delta\mathbf{r}_i$.

Cada deslocamento $\Delta\mathbf{r}_i$ é igual à diferença entre uma posição $\mathbf{r}_i$ e sua posição anterior $\mathbf{r}_{i-1}$

Em cada passo retilíneo, a força realizará um trabalho dado por

$$\Delta W_i = \mathbf{F}.\Delta\mathbf{r}_i \;\; = F.\Delta r_i \cos\theta_i \longrightarrow$$

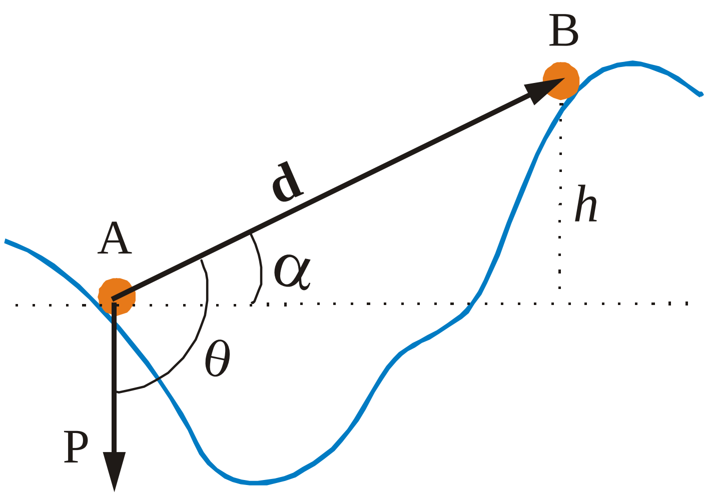
só contribui para o trabalho a componente do passo na direção da força

O trabalho total é aproximado pela soma dos trabalhos ΔW_i realizados:

$$W \cong \sum_i \mathbf{F}.\Delta\mathbf{r}_i \;\; \cong \mathbf{F}.\sum_i \Delta\mathbf{r}_i \;\; \Rightarrow W = \mathbf{F}.\mathbf{d} \;\; = Fd\cos\theta$$

O trabalho de uma força constante não depende da trajetória da partícula, mas somente do deslocamento líquido da partícula.

Exemplo – Um corpo de massa m desliza em uma montanha russa como mostrado na Figura abaixo. Calcule o trabalho realizado sobre ele pela força da gravidade entre os pontos A e B de sua trajetória.



Solução

$$W = \mathbf{P}.\mathbf{d} = mgd\cos\theta$$

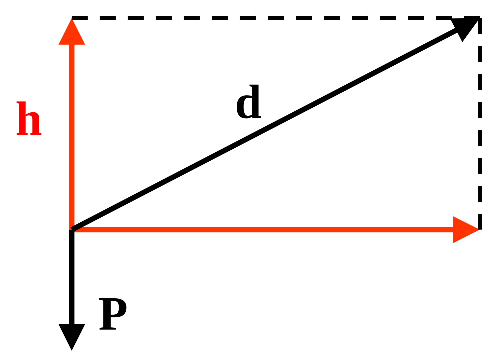
$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\Rightarrow W = mgd\cos(\pi/2 + \alpha) = -mgd\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\Rightarrow W = -mgh$$

Outro jeito:

$$W = \mathbf{P}.\mathbf{d} = \mathbf{P}.\mathbf{h} = mgh\cos\pi = -mgh$$

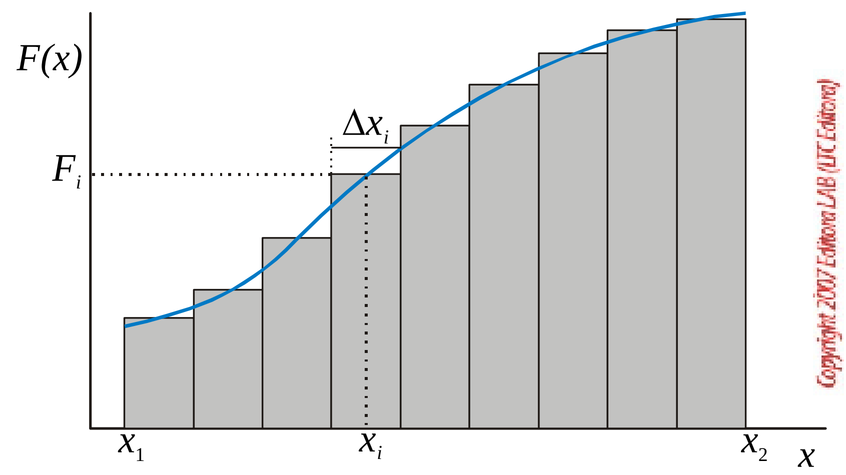


Trabalho realizado por uma força variável

• Movimento em 1 dimensão

Caso particular em que tanto a força quanto o movimento têm a mesma direção e que esta seja constante.

$$\Delta \mathbf{r}_i = \Delta x_i \mathbf{i} \quad , \mathbf{F} = F \mathbf{i}$$



$F(x)$ é mostrada na figura ao lado (linha azul).

Sabemos calcular o trabalho de uma força constante em trajetória retilínea.

Então, para cada deslocamento Δx_i da partícula, consideraremos a força como constante igual a F_i.

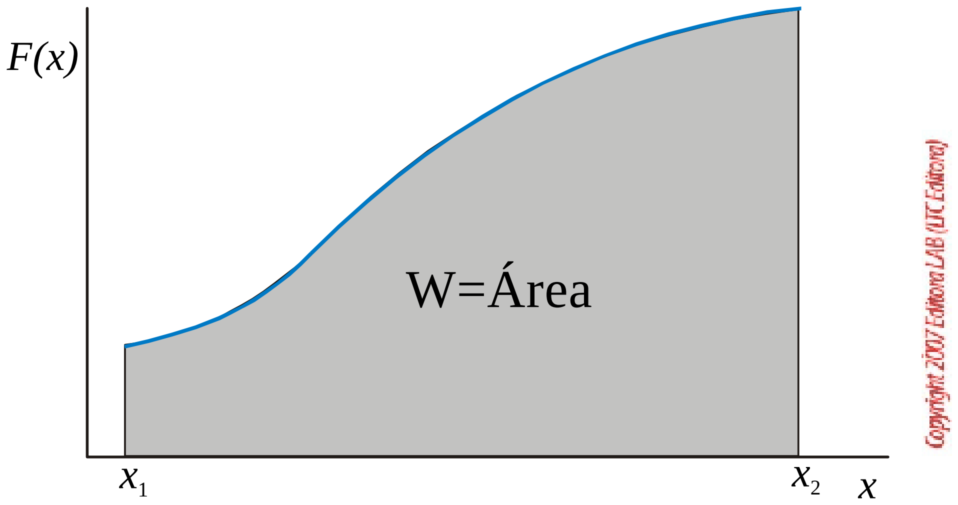
O trabalho realizado quando a partícula se desloca de x_1 a x_2 é aproximadamente

$$W \cong \sum_i F_i \Delta x_i$$ → Área sombreada na figura acima

No limite em que Δx_i tende a zero, a área sombreada cobre exatamente a região sob a curva $F(x)$.

Neste limite, o somatório exprime exatamente o trabalho e se transforma na integral:

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx}$$



Trabalho de uma força variável em 1D

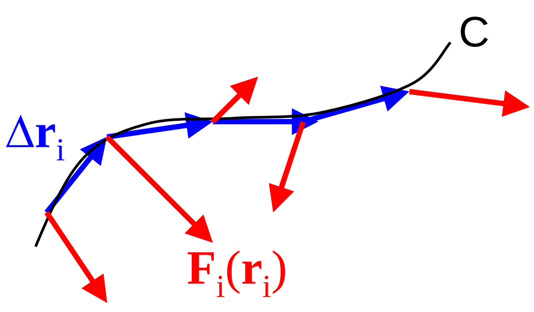
Exemplo – a) Calcule o trabalho realizado pela força descrita pela função $F(x)=ax^2+bx^4$, sobre uma partícula enquanto esta se desloca entre os pontos x_1 e x_2.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \;\; = \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + bx^4)dx \;\; = \frac{a}{3}(x_2^3 - x_1^3) + \frac{b}{5}(x_2^5 - x_1^5)$$

Trabalho realizado por uma força variável

• Movimento em 3 dimensões

Caso geral de uma força variável (em módulo, direção, sentido) que atua sobre uma partícula.



Aproximamos a trajetória da partícula por uma sequência de passos retilíneos $\Delta\mathbf{r}_i$.

Mesmo que a força não seja constante, em cada passo ela pode ser aproximada por um vetor constante $\mathbf{F}_i$.

O trabalho realizado pela força será aproximadamente

$$W \cong \sum_i \mathbf{F}_i . \Delta\mathbf{r}_i$$

No limite de passos infinitesimais $\Delta\mathbf{r}_i \rightarrow d\mathbf{r}$ e o resultado acima torna-se exato

$$W = \lim_{|\Delta\mathbf{r}_i|\to 0} \left(\sum_i \mathbf{F}_i . \Delta\mathbf{r}_i\right) \Rightarrow \boxed{W = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}}$$

→ Trabalho de uma força variável em uma trajetória qualquer em 3D

C significa que os deslocamentos $d\mathbf{r}$ devem ser tomados sobre a curva C.

Quando várias forças atuam sobre a partícula, pode-se definir o trabalho líquido sobre ela.

$$W_{liq} = \sum_i W_i = \sum_i \int_c \mathbf{F}_i .\, d\mathbf{r} = \int_C \sum_i \mathbf{F}_i . d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}_R . d\mathbf{r} = W_{F_R}$$

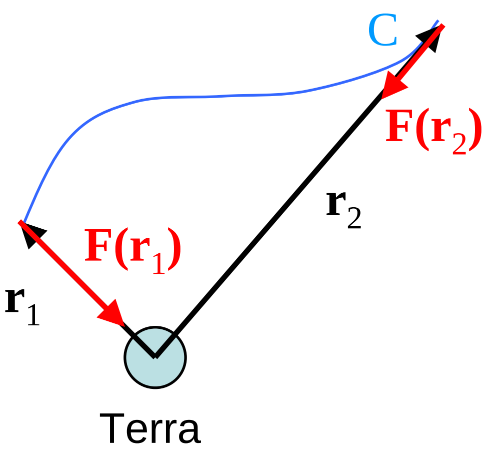
O trabalho líquido será nulo quando $\mathbf{F}_R = 0$ ou $\mathbf{F}_R$ for perpendicular à trajetória da partícula em todos os pontos.

Exemplo – Uma pequena pedra é girada em um círculo sob a ação de um fio que a prende a um ponto fixo. Calcule o trabalho realizado pela tensão do fio sobre a pedra em cada ciclo.

O trabalho é nulo porque a força que o fio exerce sobre a pedra tem direção radial e portanto é sempre perpendicular à direção de movimento da pedra.

Assim, $\mathbf{F}_R . d\mathbf{r}$ é nulo em todos os pontos da trajetória.

Exemplo – Considere uma nave de massa m que se move sob a ação de seu sistema propulsor e da força $\mathbf{F}$ de gravitação da Terra. A nave se encontra inicialmente à distância $\mathbf{r}_1$ do centro da Terra e se move para outro ponto à distância $\mathbf{r}_2$. Calcule o trabalho feito pela força da gravidade sobre a nave.



A força da gravidade sobre a nave pode ser expressa como (ver Cap. 12 – Gravitação):

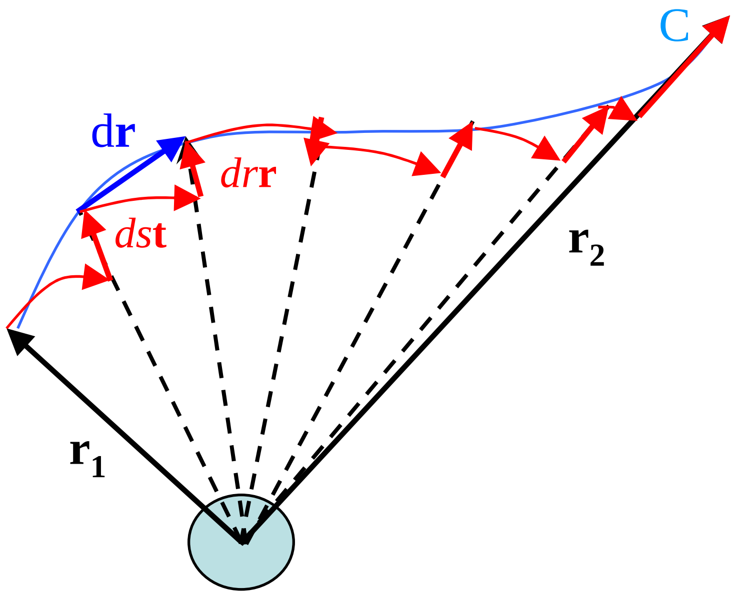
$$\mathbf{F} = -GM_T m \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição da nave em um sistema de coordenadas com origem no centro da Terra, M_T é a massa da Terra e G é a constante universal de gravitação.

A força $\mathbf{F}$ é radial, aponta sempre para o centro da Terra e varia em módulo e direção.

O trabalho realizado sobre a nave por esta força será

$$W = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$



O deslocamento d**r** ao longo da curva C pode ser decomposto em um deslocamento angular, $ds\mathbf{t}$ (perpendicular a **r**), e um deslocamento radial, $dr\mathbf{r}$ (paralelo a **r**):

$$d\mathbf{r} = dr\hat{\mathbf{r}} + ds\hat{\mathbf{t}}$$

Fazendo o tamanho dos passos tender a zero, a soma dos deslocamentos angulares e radiais tende para a curva C.

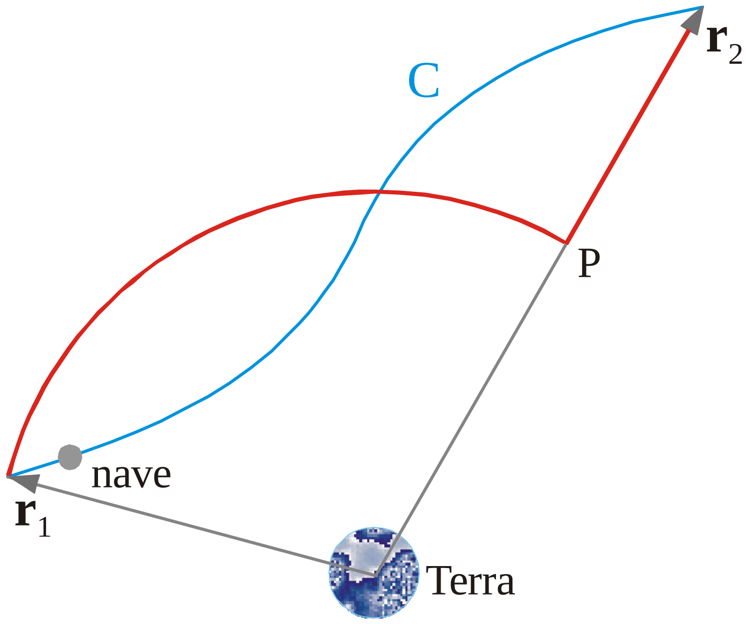
O trabalho realizado sobre a nave pela força gravitacional será:

$$W = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} \;= -GM_T m \int_C \frac{\mathbf{r}}{r^3}.d\mathbf{r} \;= -GM_T m \int_C \frac{\mathbf{r}}{r^3}.(dr\hat{\mathbf{r}} + ds\hat{\mathbf{t}})$$

Mas $\mathbf{r}.ds\hat{\mathbf{t}} = 0$ e $\mathbf{r}.dr\hat{\mathbf{r}} = rdr$

$$\Rightarrow W = -GM_T m \int_{r_1}^{r_2} \frac{rdr}{r^3} \;= -GM_T m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \;= -GM_T m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

O trabalho realizado pela força gravitacional somente depende das distâncias inicial e final entre a nave e a Terra. A trajetória da nave não importa.

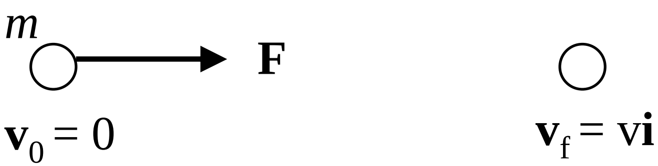


A Figura acima mostra a nave indo do ponto $\mathbf{r}_1$ ao ponto $\mathbf{r}_2$ por uma trajetória na qual fica evidente que o trabalho realizado pela Terra somente depende dos valores de $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$.

Primeiro, a nave faz todo o deslocamento angular, atingindo o ponto P. Neste trajeto, nenhum trabalho é realizado.

Em seguida, a nave faz o deslocamento radial, indo de P (à distância r_1), até $\mathbf{r}_2$ (à distância r_2) do centro da Terra. Todo o trabalho sobre a nave é realizado neste último trajeto radial.

Energia cinética



Uma força constante $\mathbf{F}=F\mathbf{i}$ atua sobre um objeto de massa m durante o tempo necessário para levá-lo do repouso à velocidade $\mathbf{v}_f = v\mathbf{i}$.

Esta força realizará um trabalho sobre o objeto dado por:

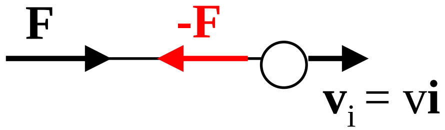
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

Mas $F_R = ma = m\dfrac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow W_{liq} = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dx}\overbrace{\frac{dx}{dt}}^{v}dx = \int_{x_1}^{x_2} mv\frac{dv}{dx}dx = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$v_1 = 0,\ v_2 = v \quad \Rightarrow W_{liq} = \dfrac{1}{2}mv^2$ $\longrightarrow$ Trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$

O corpo, agora em movimento, tem a capacidade de realizar um trabalho igual ao que recebeu.



O objeto em movimento é freado por um dispositivo através de uma força **–F**.

O objeto faz uma forca **F** sobre o dispositivo. Esta força tem o mesmo sentido do deslocamento.

$$\Rightarrow W_F = Fd \quad (1)$$

Mas $\mathrm{v}_f^2 = \mathrm{v}_0^2 - 2ad \Rightarrow 0 = \mathrm{v}^2 - 2ad \Rightarrow d = \dfrac{\mathrm{v}^2}{2a} \quad (2)$

(2) em (1)

$$W_F = F\frac{\mathrm{v}^2}{2a} = ma\frac{\mathrm{v}^2}{2a} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$$

Assim, para parar, o objeto deverá realizar um trabalho igual a $(1/2)m\mathrm{v}^2$. Isto representa a capacidade de realizar trabalho de um objeto em movimento e é chamada de energia cinética do objeto.

Energia cinética: $\boxed{K = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2}$

Na discussão anterior vimos o princípio de trabalho-energia:

$$W_{liq} = \int_1^2 F_R dx$$

$$F_R = ma = m\frac{d\mathrm{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow W_{liq} = \int_{x1}^{x2} m\frac{d\mathrm{v}}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{d\mathrm{v}}{dx}\overbrace{\frac{dx}{dt}}^{\mathrm{v}}dx = \int_{x_1}^{x_2} m\mathrm{v}\frac{d\mathrm{v}}{dx}dx = \int_{\mathrm{v}_1}^{\mathrm{v}_2} m\mathrm{v}d\mathrm{v} = \frac{1}{2}m(\mathrm{v}_2^2 - \mathrm{v}_1^2)$$

$$\Rightarrow W_{liq} = K_2 - K_1$$

$$\boxed{W_{liq} = \Delta K}$$

A variação da energia cinética de um objeto é igual ao trabalho líquido realizado sobre ele, quaisquer que sejam as forças que atuem sobre o objeto.

A unidade de energia no SI é a mesma de trabalho, o Joule (J).

Exemplo – Um carro, cuja massa vale 1200 kg, viaja inicialmente a 30 m/s em pista plana, quando o motorista freia fortemente. A força de atrito dos pneus com o piso vale 7200 N. Calcule o deslocamento d do carro durante a freada.

Ignorando a resistência do ar, o carro está sujeito a 3 forças, seu peso, a normal do chão e a força de atrito dos pneus com o chão.

A normal e o peso não realizam trabalho neste caso, pois são perpendiculares ao deslocamento.

O trabalho da força de atrito durante a freada é dado por:

$$W_{fa} = \mathbf{f}_a.\mathbf{d} = -f_a d = W_{liq}$$

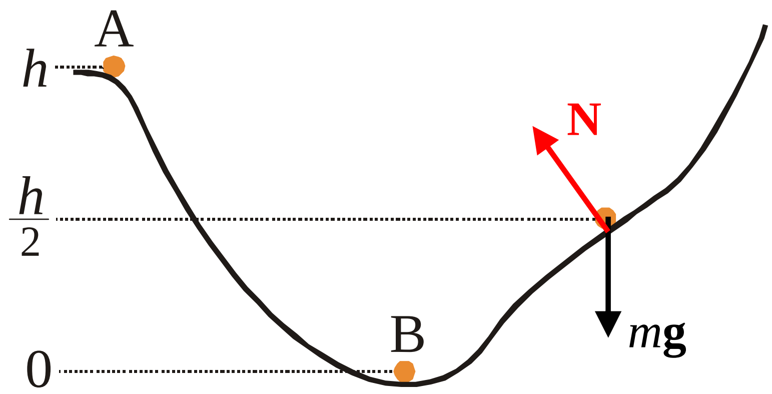
$$W_{liq} = K_f - K_i$$

$$\Rightarrow -f_a d = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_f^2 - \frac{1}{2} m\mathrm{v}_i^2$$

Como $\mathrm{v}_f = 0$, $d = \dfrac{m\mathrm{v}_i^2}{2 f_a} = \dfrac{1200 \text{ kg x } 30^2 \, \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{2 \text{ x } 7200 \text{ N}} = 75 \text{ m}$

$d \,\alpha\, \mathrm{v}_i^2$, assim se $\mathrm{v}_i = 40$ m/s, o carro percorre 133 m!

Exemplo – Uma esfera de massa m desliza sem atrito sobre uma tobogã como mostra a Figura abaixo. Ela parte do repouso de um ponto A (a uma altura h de uma referência arbitrária) passa pelo ponto B de altura mínima igual a zero e começa a subir. a) Determine a velocidade da esfera quando ela passa por B. b) Determine a altura final onde a esfera irá parar. c) Calcule a velocidade da esfera quando sua altura for igual a $h/2$.



a) Forças que atuam na esfera:
 peso ($m\mathbf{g}$) e normal ($\mathbf{N}$).

Neste caso a normal é perpendicular ao deslocamento em cada ponto, assim ela não realiza trabalho.

$$W_{liq} = K_B - K_A \;\Rightarrow \int_A^B m\mathbf{g}.d\mathbf{r} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_A^2$$

$$\mathrm{v}_A = 0 \;\Rightarrow \int_A^B -mg\mathbf{j}.(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 \;\Rightarrow -mg\int_{h_A}^{h_B} dy = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2$$

$$\Rightarrow mg(h_A - h_B) = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 \;\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 \;\Rightarrow \mathrm{v}_B = \sqrt{2gh}$$

b) O ponto de altura máxima terá velocidade nula e assim $K_f = 0$ e $K_i = K_A = 0$.

$$K_f - K_A = -mg(h_f - h_A) \;\Rightarrow 0 = -mg(h_f - h_A) \;\Rightarrow h_f = h_A = h$$

c) Obter v_f quando $h_f = h/2$

$$K_f - K_A = -mg(h_f - h_A)$$

Mas $K_A = 0$ e $h_A = h$

$$\Rightarrow K_f = -mg(\frac{h}{2} - h) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mg(h - \frac{h}{2}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mgh$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{gh}$$

Há dois pontos de altura $h/2$ e em ambos a velocidade tem o mesmo valor.

Potência

Potência indica a taxa temporal de alguma troca de energia. A potência realizada por uma força e dada por

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Como $dW = \mathbf{F}.d\mathbf{r}$**,**

$$P = \frac{\mathbf{F}.d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \Rightarrow \boxed{P = \mathbf{F}.\mathbf{v}}$$

Considerando a potência realizada pela resultante $\mathbf{F}_\mathrm{R}$ das várias forças que atuam sobre uma partícula de massa m, pela 2ª lei de Newton:

$$\mathbf{F}_R = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \Rightarrow P = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.\mathbf{v} \qquad (1)$$

Mas $\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\mathbf{v}.\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}.\mathbf{v} + \mathbf{v}.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.\mathbf{v}$ (2)

(2) em (1): $P = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\mathbf{v}.\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2) \Rightarrow \boxed{P = \frac{dK}{dt}}$

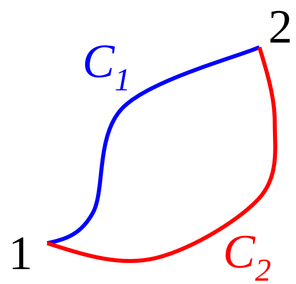
No SI a unidade de potência é o Watt, W=J/s.

Forças conservativas

O trabalho feito por uma força constante ou por uma força gravitacional sobre uma partícula, quando ela se desloca entre dois pontos, não depende da trajetória da partícula, mas somente dos pontos inicial e final.

Assim, para estas forças, o trabalho em um circuito fechado é nulo, pois os pontos inicial e final coincidem.

Uma força $\mathbf{F}$ que realiza um trabalho nulo em qualquer circuito fechado é chamada **força conservativa**.



$$\int_{1,C_1}^{2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_{2,C_2}^{1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0 \;\Rightarrow\; \int_{1,C_1}^{2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = -\int_{2,C_2}^{1} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \int_{1,C_1}^{2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{1,C_2}^{2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

→o trabalho de ir de 1 para 2 independe da trajetória

Uma força constante (em módulo, direção e sentido) e a força gravitacional são exemplos de forças conservativas.

A força de atrito não é conservativa, pois o trabalho realizado por ela depende da distância total percorrida pela partícula, que não é nula em um circuito fechado.

Energia potencial

O fato do trabalho de uma força conservativa não variar com a trajetória permite definir uma função, unívoca dos pontos $\mathbf{r}$ do espaço, associada com a força $\mathbf{F}$, chamada de energia potencial.

A energia potencial $U(\mathbf{r})$ de uma partícula no ponto $\mathbf{r}$, sujeita a uma força conservativa $\mathbf{F}$, é o trabalho realizado por esta força quando a partícula se desloca do ponto $\mathbf{r}$ até o ponto de referência P:

$$\boxed{U(\mathbf{r}) \equiv \int_{\mathbf{r}}^{P} \mathbf{F}.d\mathbf{r}}$$

O valor de $U(\mathbf{r})$ depende do ponto de referência escolhido, mas a variação da energia potencial entre dois pontos é independente da escolha da referência:

$$U_2 - U_1 = \int_2^P \mathbf{F}.d\mathbf{r} - \int_1^P \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_2^P \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_P^1 \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_2^1 \mathbf{F}.d\mathbf{r} = W_{2,1} = -W_{1,2}$$

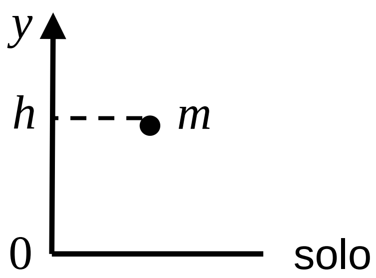
De uma maneira geral, a energia potencial significa potencial para realizar trabalho.

Se uma partícula tiver uma energial potencial $U(\mathbf{r})$ em relação ao ponto de referência P, é possível fazê-lo retornar de $\mathbf{r}$ a P num processo no qual ele realiza um trabalho $U(\mathbf{r})$. Assim, energia potencial é uma espécie de trabalho disponível.

Exemplo – Energia potencial de um corpo sob gravidade uniforme

Calcule a energia potencial, em relação ao solo, de um partícula de massa m na proximidade da superfície da Terra.

O solo é o ponto de referência:



$$U = \int_h^0 \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_h^0 -mg\mathbf{j}.(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = -mg\int_h^0 dy$$

$$\Rightarrow U = mgh$$

Exemplo – Energia potencial de um corpo sob gravidade não uniforme

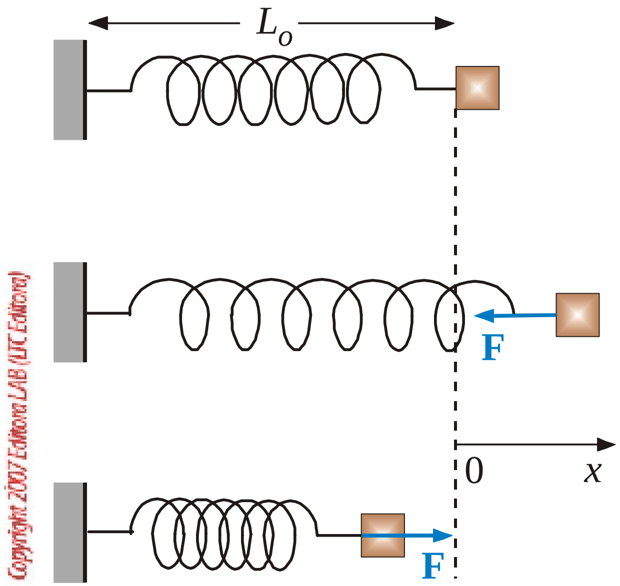
Calcule a energia potencial, em relação ao infinito, de um partícula de massa m sujeita à ação da gravidade da Terra.

$$U = \int_r^\infty \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_r^\infty (-GMm)\frac{\mathbf{r}}{r^3}.d\mathbf{r} = -GMm\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -GMm\left(\frac{-1}{r}\right)_r^\infty$$

$$\Rightarrow U(r) = \frac{-GMm}{r}$$

Exemplo – Energia potencial de uma mola

Calcule a energia potencial de uma mola em função de sua variação de comprimento.



A força exercida por uma mola se opõe à sua compressão ou distensão. Trata-se de uma força restauradora, que tende a restaurar a posição de equilíbrio ($x=0$, $L=L_0$) da mola:

$$F = -kx$$

onde k é a constante elástica da mola.

A energia potencial em relação à posição de equilíbrio ($x=0$) será:

$$U(x) = \int_x^0 F(x)dx = \int_x^0 -kxdx \ = \int_0^x kxdx \ = \frac{1}{2}kx^2$$

$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ > 0, tanto para a mola comprimida quanto distendida

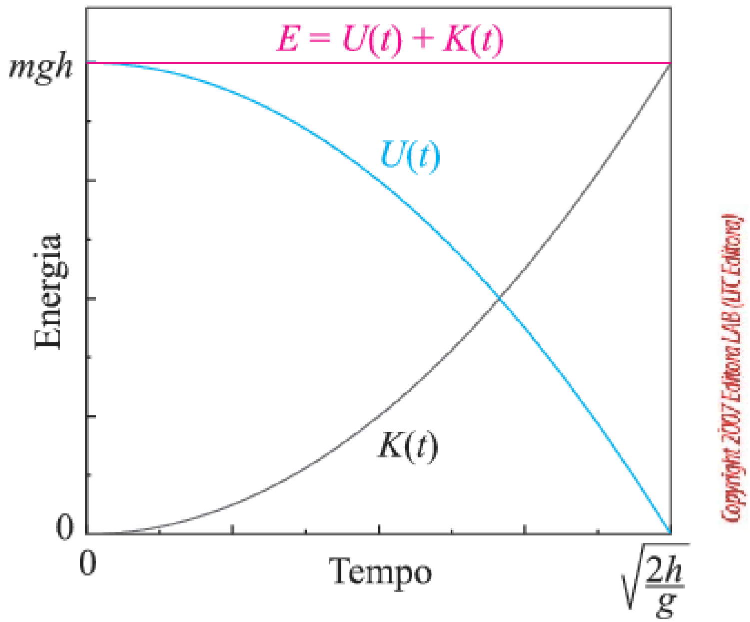
Queda livre

Supondo que o objeto inicia sua queda em $t = 0$, partindo do repouso e de uma altura h. Sua velocidade v e altura y em um instante t qualquer serão

$$\mathrm{v} = -gt \;\Rightarrow t = -\frac{\mathrm{v}}{g} \qquad (1)$$

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

(1) em (2): $y = h - \frac{1}{2}g\frac{\mathrm{v}^2}{g^2} \Rightarrow y = h - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{g}$ (3)



Mutiplicando (3) por mg:

$$mgy(t) = mgh - \frac{1}{2}m[\mathrm{v}(t)]^2$$

$$\Rightarrow mgh = mgy(t) + \frac{1}{2}m[\mathrm{v}(t)]^2$$

A equação acima pode ser escrita como $mgh = U(t) + K(t)$

Ou seja, a soma das energias potencial e cinética permanece constante e igual a mgh durante a queda.

A energia potencial inicial do corpo é gradativamente convertida em energia cinética na queda.

Conservação da energia mecânica

Vamos considerar uma partícula de massa m, movendo-se do ponto 1 ao ponto 2 sob a ação da força resultante $\mathbf{F}_{\mathrm{R}}$.

Pelo princípio trabalho-energia:

$$K_2 - K_1 = W_{1,2}$$

Se a força resultante for decomposta em partes conservativa e não conservativa teremos:

$$K_2 - K_1 = W_{c.1,2} + W_{nc.1,2}$$

Mas $U_1 - U_2 = \int_1^P \mathbf{F}.d\mathbf{r} - \int_2^P \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{r} = W_{c.1,2}$

$$\Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + W_{nc.1,2} \quad \Rightarrow K_2 + U_2 = K_1 + U_1 + W_{nc.1,2}$$

Definindo **energia mecânica** $E = K + U$, a equação acima torna-se

$$\boxed{E_2 = E_1 + W_{nc.1,2}}$$

A energia mecânica final é igual à energia mecânica inicial mais o trabalho das forças não conservativas.

Se o sistema estiver sujeito apenas a forças conservativas, teremos:

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

ou seja, $E_2 = E_1$ e a energia mêcânica do sistema se conserva.

Lei de conservação da energia mecânica: quando uma partícula se movimenta sob o efeito de forças conservativas, sua energia mecânica permanece constante.

Um exemplo de força não conservativa é a força de atrito cinético.

O trabalho realizado pela força de atrito $\mathbf{f}_a$ quando um objeto tem um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r}$ é

$$dW_{fa} = \mathbf{f}_a . d\mathbf{r}$$

A força de atrito cinético é sempre oposta ao deslocamento

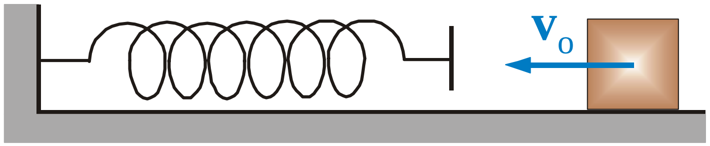
$$\Rightarrow dW_{fa} = -f_a dr$$

O trabalho realizado em um circuito fechado é portanto a soma de trabalhos negativos e não tem como ser nulo. Assim, a força de atrito cinético é não conservativa.

O trabalho da força de atrito cinético é negativo, assim esta força diminui a energia mecânica do objeto sobre o qual ela atua. Ou seja, a força de atrito cinético é dissipativa.

No contexto da mecânica, o atrito é a única força não conservativa.

Exemplo 7.17 – Um bloco de massa igual a $2{,}0$ kg, movendo-se inicialmente à velocidade $v_0 = 4{,}0$ m/s, é freado por uma mola cuja constante elástica vale 800 N/m. Calcule a) a compressão máxima x_m da mola; b) a velocidade do bloco quando a compressão da mola é $x_m/2$.



a) Inicialmente $U = 0$ e $E_i = K_i$. $\Rightarrow E_i = K_i = \frac{1}{2} m v_0^2$

Quando a compressão é máxima, $v = 0$ e $K = 0$ $\Rightarrow E_f = U = \frac{1}{2} k x_m^2$

Como só atuam no sistema forças conservativas, $E_i = E_f$.

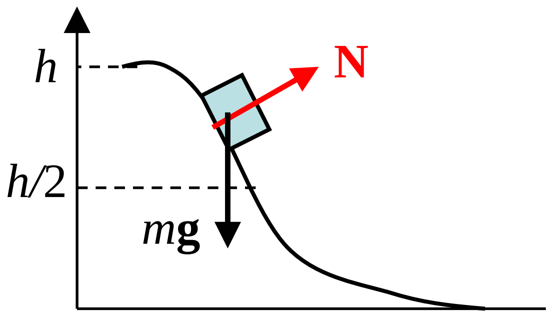
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 \;\Rightarrow x_m = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 = \; 0{,}20 \text{ m}$$

b) Quando $x = x_m/2$, $E = K + U$. Como a energia mecânica se conserva, $E = E_i$.

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{x_m}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \;\Rightarrow m v^2 = m v_0^2 - k\frac{x_m^2}{4}$$

Mas $\frac{1}{2} k x_m^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \;\Rightarrow m v^2 = m v_0^2 - \frac{1}{4} m v_0^2 \;\Rightarrow v^2 = \frac{3}{4} v_0^2 \Rightarrow v = v_0 \sqrt{\frac{3}{4}} = \; 3{,}5 \text{ m/s}$

Exemplo 7.18 – Um trenzinho de montanha russa passa no ponto de máxima altura h com a velocidade v_0. Qual é a sua velocidade quando descer para a altura $h/2$?



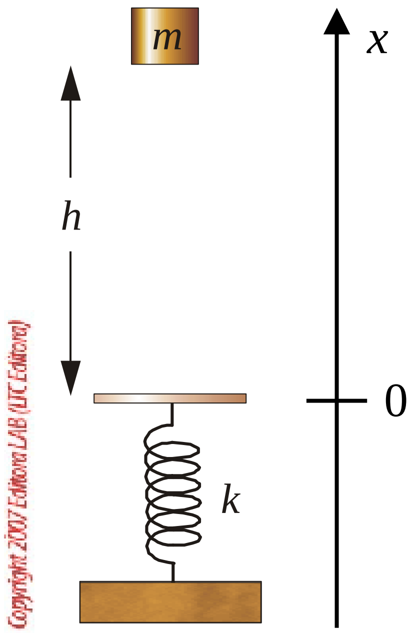
Desprezando a força de atrito, que não é conservativa, atuam sobre o trenzinho a normal exercida pelo trilho e o peso.

A normal é perpendicular ao deslocamento em cada ponto, então seu trabalho e nulo.

Na ausência de força de atrito, a energia mecânica do sistema será conservada.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{h}{2} \quad \Rightarrow v^2 = v_0^2 + gh \quad \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + gh}$$

Exemplo – O bloco da Figura abaixo cai a partir do repouso sobre a plataforma. Calcule a compressão máxima $x_{\max}$ atingida pela mola.



Escolhemos a posição inicial da plataforma como referência para a energia potencial gravitacional.

$$E_i = mgh$$

Na compressão máxima, v = 0:

$$E_f = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 - mgx_{\max}$$

A energia mecânica se conserva, E_i=E_f:

$$mgh = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 - mgx_{\max} \qquad (\text{x } 2/k)$$

$$\Rightarrow x_{\max}^2 - \frac{2mg}{k}x_{\max} - \frac{2mgh}{k} = 0 \quad \Rightarrow x_{\max} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mgh}{k}}$$

Como $x_{\max}$ é positivo, $x_{\max} = \dfrac{mg}{k} + \sqrt{\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2 + \dfrac{mgh}{k}}$

Lei da conservação da energia

A conservação da energia mecânica vale quando apenas forças conservativas atuam em um sistema.

Quando existe atrito cinético, parte da energia mecânica é dissipada. O trabalho da força de atrito gera calor, que é energia térmica.

Portanto, a soma das energias mecânica e térmica do sistema se conserva no processo.

Energia é uma grandeza que pode se manifestar de formas muito diversas: energia cinética e energia potencial, que juntas compõem a energia mecânica, energia térmica, energia química, energia eletromagnética, etc.

Processos diversos podem destruir energia de uma forma e recriá-la de outra, ou seja, transformar energia de uma forma em outra.

Um corpo quente pode perder energia térmica emitindo radiação eletromagnética, que contém energia.

No processo de fotossíntese, as plantas absorvem luz do Sol e convertem sua energia em energia química.

Com o advento da teoria da relatividade Einstein descobriu uma nova forma de transformação de energia: a massa de repouso m_0 de um corpo é equivalente a uma energia dada por

$$E_0 = m_0 c^2$$

onde c é a velocidade da luz. Desta forma define-se a energia relativística de uma partícula como sendo sua energia cinética mais a energia devido à sua massa de repouso.

A investigação empírica de todas as formas de conversão de energia já reconhecidas levou a um dos princípios mais fundamentais da Natureza, a **lei da conservação da energia**.

Toda perda de alguma forma de energia é compensada pelo aparecimento do mesmo valor de energia, em outra forma.

A energia pode aparecer em diversas formas, mas sua quantidade nunca se altera em um **sistema isolado**. A energia total do Universo se conserva, o mesmo ocorrendo em qualquer sistema isolado.

Sistema isolado é aquele livre de qualquer interação dinâmica com seu ambiente; não realiza trabalho sobre qualquer sistema, não troca calor com seu exterior, não emite nem absorve radiação eletromagnética ou outras formas de radiação.

Exemplo – O átomo de hidrogênio consiste em um próton e um elétron ligados devido à força elétrica entre eles. Para ionizar o átomo de hidrogênio, transformando-o em um próton e um elétron separados, é necessário que lhe forneçamos uma quantidade de energia igual a 13,6 eV. Qual é a diferença entre a massa do átomo de hidrogênio e a soma das massas do próton e do elétron?

$$E_H + 13,6\,\mathrm{eV} = E_p + E_e$$

$$\Rightarrow m_H c^2 + 13,6\,\mathrm{eV} = m_p c^2 + m_e c^2$$

$$\Rightarrow \Delta m \equiv (m_p + m_e) - m_H = \frac{13,6\,\mathrm{eV}}{c^2}$$

Usando-se c = 299 792 458 m/s e 1 eV = 1,602 176 53 x 10^{-19} J obtém-se

$$\Delta m = 2,42 \times 10^{-35}\,\mathrm{kg}$$

Cálculo da força a partir do potencial

Vamos considerar inicialmente uma partícula que se move na direcão x.

Sua energia potencial é uma função da posição:

$$U(x) = \int_x^P F(x')dx' = -\int_P^x F(x')dx' \qquad (1)$$

onde P é o ponto de referência utilizado no cálculo de U.

Derivando a equação (1) em relação a x obtém-se:

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU}{dx}}$$

O escolha do ponto P de referência não afeta o valor da força calculada, pois escolher um ponto diferente irá apenas adicionar uma constante a $U(x)$ e isto não afeta sua derivada.

Caso geral, movimento em três dimensões.

$$U(\mathbf{r}) = -\int_P^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}').d\mathbf{r}'$$

Neste caso $dU = -\mathbf{F}.d\mathbf{r} = -(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}).(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$

$$\Rightarrow dU = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

Assim

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}}$$

Exemplo – Um átomo dentro de um cristal está sujeito a um potencial da forma

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2) \quad ,$$

onde a, b e c são constantes características do cristal e x, y, z, são as componentes do deslocamento do átomo em relação à sua posição de equilíbrio. Calcule a força atuante sobre o átomo.

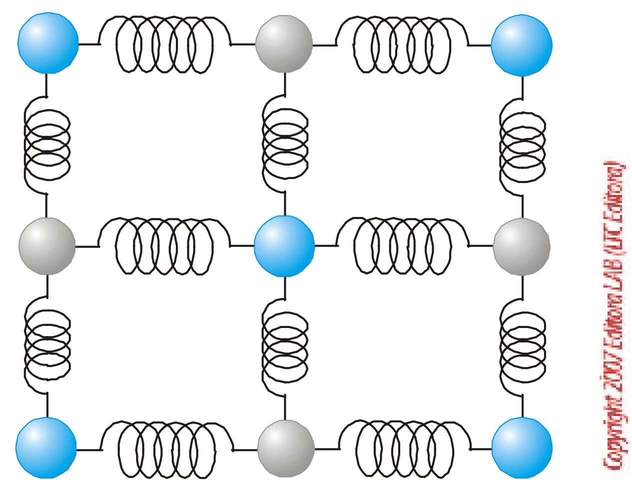
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -ax$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -by$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -cz$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = -ax\mathbf{i} - by\mathbf{j} - cz\mathbf{k}$$

Representação do átomo em 2D



As forças atuantes sobre o átomo equivalem ao efeito de molas com constantes elásticas a, b, c nas direções x, y, z.

Forças conservativas em uma dimensão

Vamos considerar uma partícula que se move ao longo do eixo x sujeita a uma força F.

Se a força for função da posição, $F=F(x)$, ela será conservativa.

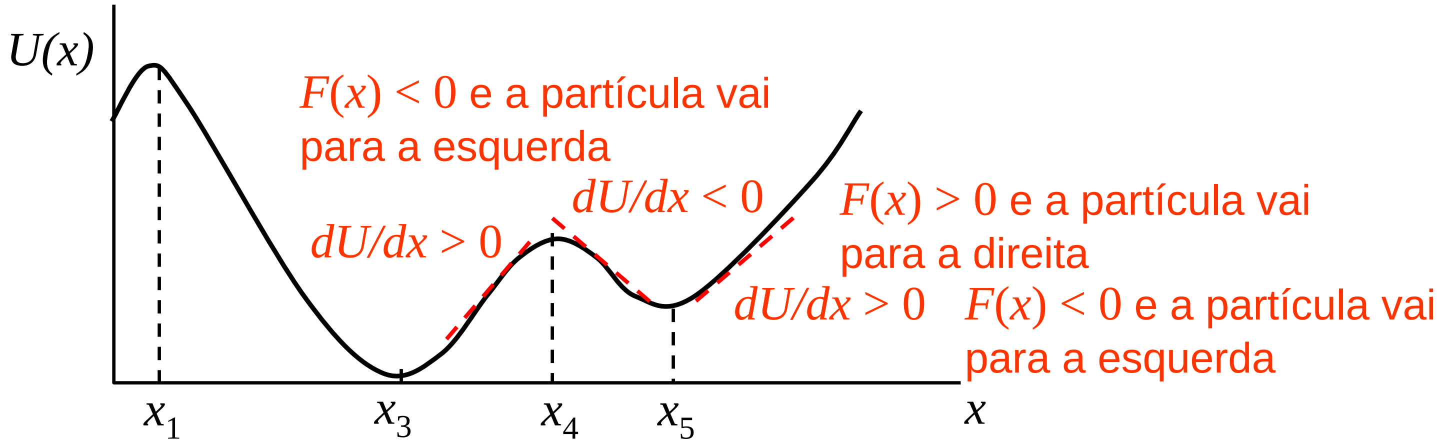
Consideremos um trajeto em circuito fechado da partícula em que ela sai do ponto x_0, vai até o ponto x_f e retorna então a x_0.

$$W = \int_{x_0}^{x_f} F(x)dx + \int_{x_f}^{x_0} F(x)dx = \int_{x_0}^{x_f} F(x)dx - \int_{x_0}^{x_f} F(x)dx = 0$$

Ao analisar a energia potencial de uma mola, já havíamos admitido sem prova que a força de uma mola tencionada é conservativa.

Aspectos gerais do movimento 1D de uma partícula sob força conservativa

A figura abaixo mostra a variação do potencial de uma partícula.



$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Logo os pontos de equlíbrio da partícula, onde $F(x) = 0$, correspondem a pontos de máximo e mínimo da função $U(x)$.

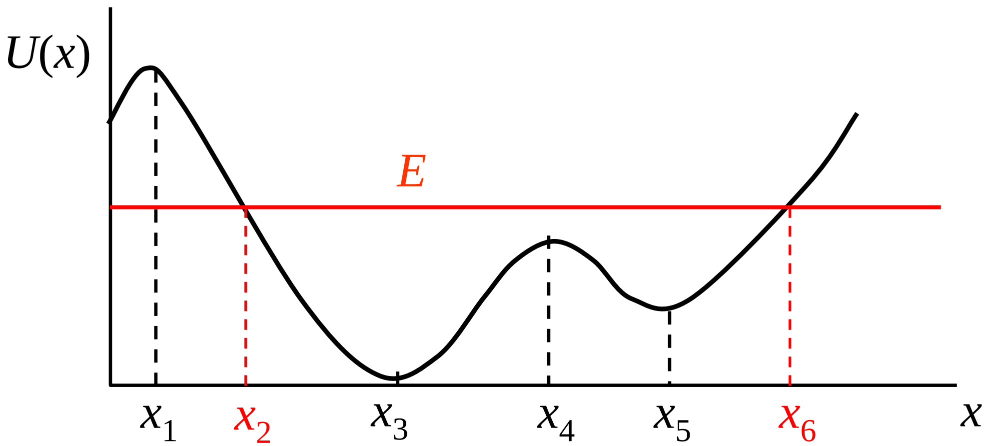
Em x_1, x_3, x_4 e x_5 a partícula pode permanecer em repouso.

Em x_1 e x_4, se a partícula sofrer um pequeno deslocamento, irá se afastar dali com aceleração crescente. Estes são pontos de equilíbrio instável.

Em x_3 e x_5, a partícula fica sujeita a uma força restauradora para o ponto de equilíbrio. Estes são pontos de equilíbrio estável.

Próxima de um ponto de equilíbrio estável a partícula tem comportamento oscilatório.

Vamos supor que a partícula sujeita ao potencial da figura abaixo tenha energia mecânica $E = K(x) + U(x)$.



Se inicialmente a partícula estava no intervalo $x_2 \leq x \leq x_6$,seu movimento ficará restrito a este domínio.

Se a partícula estiver indo para a direita, no ponto x_6, $\mathrm{v} = 0$ e $K = 0$, pois $E = U$.

Em x_6, $dU/dx > 0$, então $F < 0$, apontando para a esquerda. A partícula inverte o sentido de seu movimento. Argumentos análogos aplicam-se para x_2.

x_2 e x_6 são chamados pontos de retorno da partícula.

Exemplo – Uma partícula está sujeita a uma força $F(x)$ que lhe confere um potencial $U(x)=ax^4-bx^3+cx^2$ onde $a=24$ J/m^4, $b=32$ J/m^3 e $c=9$ J/m^2.
a) Determine a força $F(x)$. b) Encontre os pontos de equilíbrio e analise para cada um se o equilíbrio é estável ou instável. c) Supondo que a partícula tenha uma energia mecânica total igual a -0,5 J analise a região em que ela pode ser encontrada.

a) $$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -(4ax^3 - 3bx^2 + 2cx) = -(96\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^4}x^3 - 96\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}x^2 + 18\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}x)$$

b) Os pontos de equilíbrio são aqueles onde $F(x)=0$

$$\Rightarrow F(x) = -(96\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^4}x^3 - 96\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}x^2 + 18\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}x) = 0 \Rightarrow -x(96\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^4}x^2 - 96\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}x + 18\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}) = 0$$

Raízes: $x_1=0$, $x_2=0{,}25$ m, $x_3=0{,}75$ m

Para analisarmos a natureza de cada ponto equilíbrio é necessário ter os valores da derivada segunda $U''(x)$ em cada um dos pontos de equilíbrio.

$$U''(x) = 288\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^4}x^2 - 192\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}x + 18\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}$$

$$U''(x_1) = 18\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2},\ U''(x_2) = -12\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2},\ U''(x_3) = 36\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2},$$

Assim, x_1 e x_3 são pontos de equilíbrio estável e x_2 de equilíbrio instável

c) Supondo que a partícula tenha uma energia mecânica total igual a -0,5 J analise a região em que ela pode ser encontrada.

A partícula só pode estar em regiões onde $U \leq E$, ou seja $U \leq -0.5$ J

Vamos então calcular os valores de energia potencial que ela teria nos vários pontos de equilíbrio:

$$U(x_1) = 0 \text{ J},\ U(x_2) = 0{,}156 \text{ J},\ U(x_3) = -0{,}844 \text{ J}$$

Como $U(x_1) > -0{,}5$ J e $U(x_2) > -0{,}5$ J, a partícula não pode estar nas proximidades de x_1 e x_2.

Mas $U(x_3) < -0{,}5$ J, então a partícula pode ser encontrada nas proximidades de x_3.

Em x_3 a partícula terá energia cinética $K = E - U = -0{,}5 \text{ J} - (-0{,}844 \text{ J}) = 0{,}344$ J

Ao se mover para valores acima e abaixo de x_3, ela atingirá dois pontos, um de cada lado, onde $U = -0{,}5$ J e consequentemente $K=0$. Estes serão os pontos de retorno da partícula para $E = -0{,}5$ J.

Energia e massa relativísticas

Einstein mostrou que a massa de repouso m_0 de um corpo é equivalente a uma energia E_0 dada por

$$E_0 = m_0 c^2$$

onde c é a velocidade da luz.

Se de alguma forma a partícula de massa de repouso m_0 for aniquilada, a energia gerada no processo de aniquilação é E_0.

Define-se então a energia relativística (E) de uma partícula como a soma de sua energia cinética (K) e a energia devido à sua massa de repouso (E_0):

$$E = K + E_0$$

Quando uma partícula de massa de repouso m_0 se move com velocidade v, sua massa adquire o valor

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$$

A energia relativística total desta partícula é $E = mc^2 = K + E_0$.

$$\Rightarrow E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

O acréscimo de energia devido ao movimento da partícula é sua energia cinética. Assim a expressão para a energia cinética relativística será

$$K = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$