Capítulo 5

Movimento no plano e no espaço

Recursos com copyright incluídos nesta apresentação:

http://phet.colorado.edu

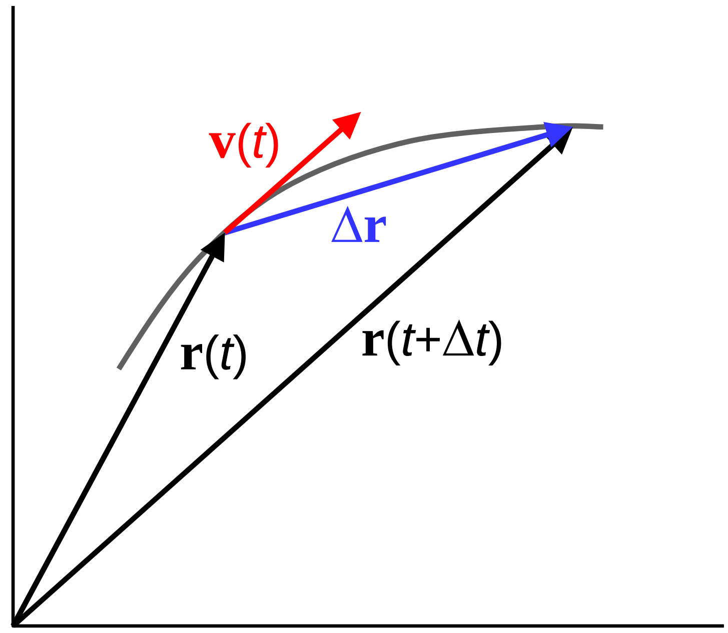
Capítulo
5

Descrição vetorial do movimento

Uma partícula movendo-se sobre uma curva.

Suas posições nos instantes t e $t + \Delta t$ são respectivamente $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + \Delta t)$.

Seu deslocamento no intervalo de tempo Δt é $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$,



Sua velocidade média será

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Sua velocidade no instante t será

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\,\mathbf{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

A velocidade da partícula em qualquer instante se alinha com a tangente da trajetória no ponto ocupado

$$\boxed{\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

A aceleração média da partícula será

$$\overline{\mathbf{a}} \equiv \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

Sua aceleração no instante t será

$$\boxed{\mathbf{a}(t) \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

MRU: $\mathbf{a}=0$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(t)dt \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_0 dt \Rightarrow \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t$$

MUV: $\mathbf{a}=$ constante

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}dt \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t)dt$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

Calcular $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{r}(t)$ a partir de $\mathbf{a}(t)$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow d\mathbf{v} = \mathbf{a}dt \Rightarrow \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a}dt \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \int_0^t \mathbf{a}dt \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(t)dt}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt \Rightarrow \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}dt \Rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \int_0^t \mathbf{v}dt \Rightarrow \boxed{\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t)dt}$$

Informação completa: $\mathbf{a}(t), \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0$

O vetor posição pode ser decomposto em suas componentes

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

A derivada de uma soma é a soma das derivadas, e os unitários (**i, j, k**) são constantes que não se alteram no tempo. Logo, tem-se que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

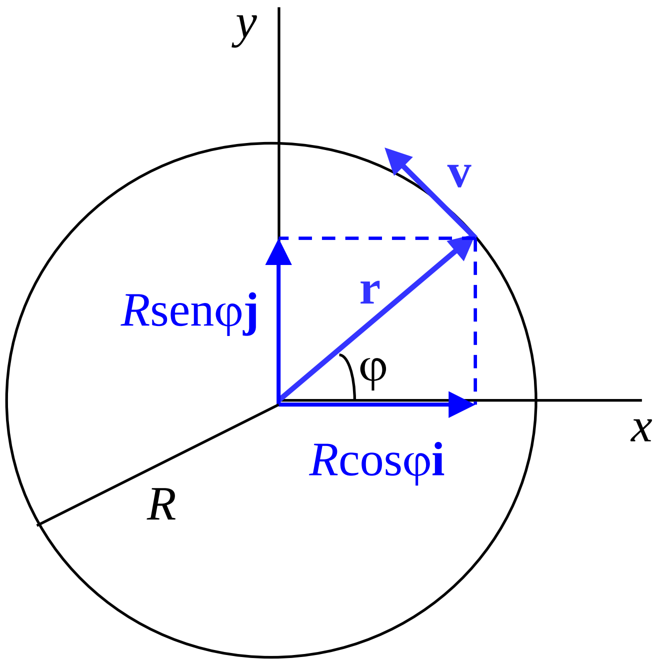
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j}\frac{dv_y}{dt} + \mathbf{k}\frac{dv_z}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

O movimento em 3D pode ser imaginado como a superposição de três movimentos unidimensionais independentes

$$\begin{cases} x(t),\ \mathrm{v}_x(t),\ a_x(t) \\ y(t),\ \mathrm{v}_y(t),\ a_y(t) \\ z(t),\ \mathrm{v}_z(t),\ a_z(t) \end{cases}$$

Movimento circular uniforme (MCU)

Uma partícula percorre a circunferência de raio R, com velocidade $\mathbf{v}$ de módulo constante.



Sua posição $\mathbf{r}(t)$ será completamente definida pelo ângulo φ

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = R[\cos\varphi(t)\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\varphi(t)\,\mathbf{j}]}$$

A velocidade da partícula será

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R\cdot\frac{d\varphi}{dt}[-\mathrm{sen}\,\varphi(t)\,\mathbf{i} + \cos\varphi(t)\,\mathbf{j}],$$

Sendo $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ sua velocidade angular,

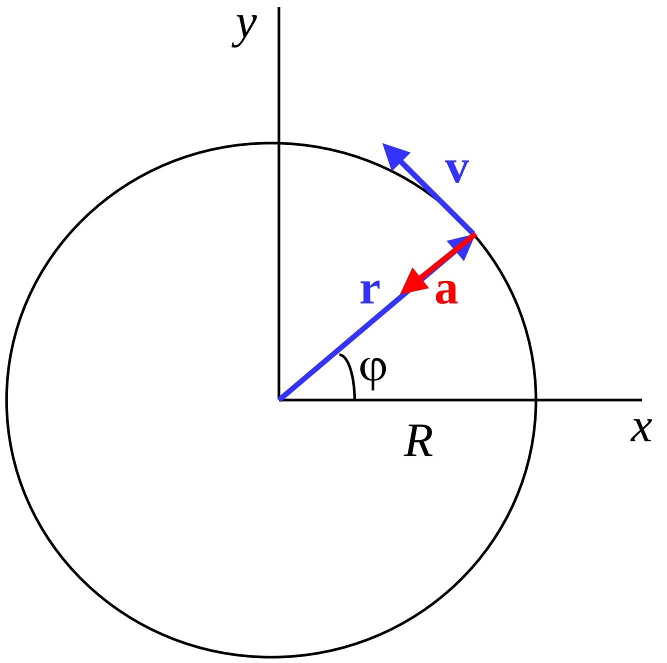
$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \omega R[-\mathrm{sen}\,\varphi(t)\,\mathbf{i} + \cos\varphi(t)\,\mathbf{j}]}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = \omega R^2(-\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}\perp\mathbf{r}$$

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = R[\cos\varphi(t)\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\varphi(t)\,\mathbf{j}]}$$

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \omega R[-\mathrm{sen}\,\varphi(t)\,\mathbf{i} + \cos\varphi(t)\,\mathbf{j}]}$$



A aceleração da partícula será

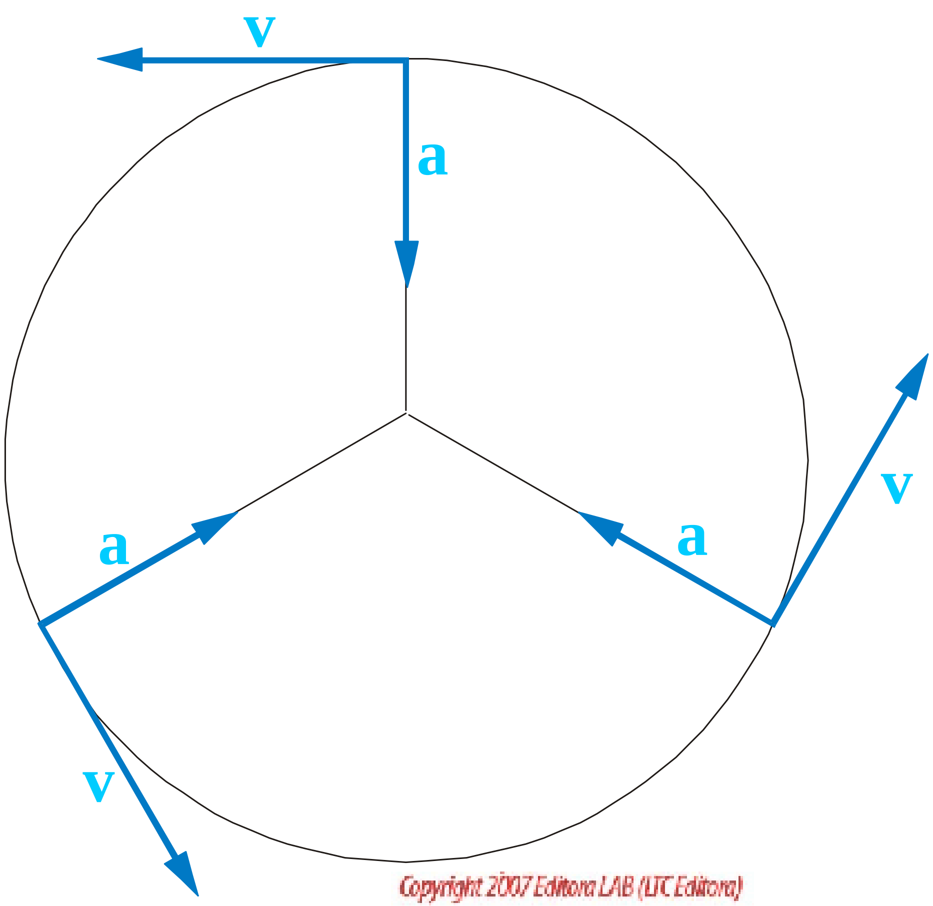
$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega R \frac{d\varphi}{dt}[-\cos\varphi(t)\,\mathbf{i} - \mathrm{sen}\,\varphi(t)\,\mathbf{j}]$$

Logo

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = -\omega^2 R[\cos\varphi(t)\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\varphi(t)\,\mathbf{j}]}$$

De forma compacta

$$\mathbf{r}(t) = R\hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}(t) = \omega R\hat{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{a}(t) = -\omega^2 R\hat{\mathbf{r}}$$



$$\mathbf{r}(t) = R\hat{\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{v}(t) = \omega R\hat{\mathbf{v}},$$

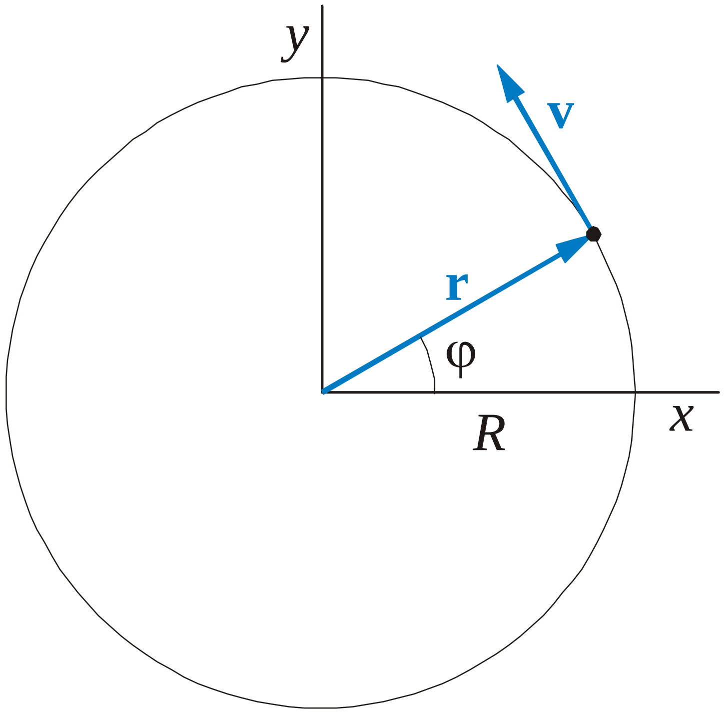
$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 R\hat{\mathbf{r}}$$

$\mathbf{a}(t)$ aponta para o centro do círculo em qualquer ponto da trajetória.

$\mathbf{a}(t)=\mathbf{a}_c(t)$ é chamada de aceleração centrípeta. Seu módulo é $a_c = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R$

Movimento circular **não** uniforme

Uma partícula percorre a circunferência de raio R, com velocidade $\mathbf{v}$ de módulo variável



Sua posição $\mathbf{r}(t)$ será completamente definida pelo ângulo φ

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = R[\cos\varphi(t)\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\varphi(t)\,\mathbf{j}]}$$

A velocidade da partícula será

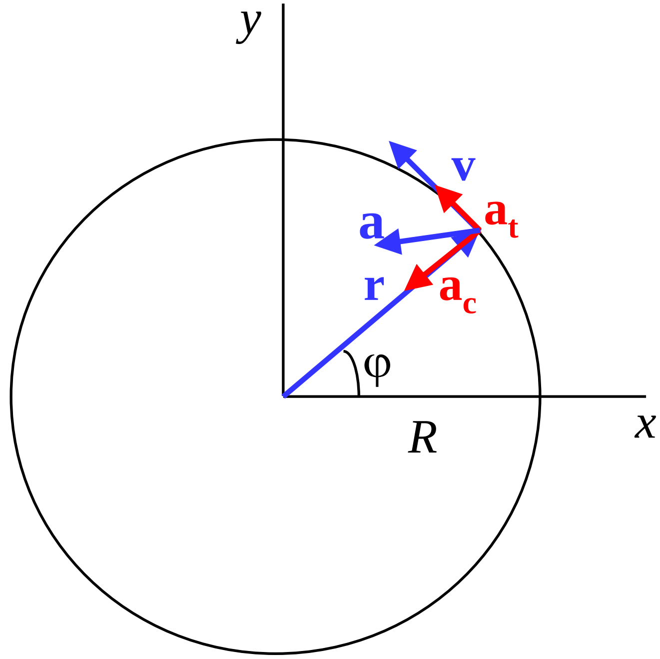
$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R\cdot\frac{d\varphi}{dt}[-\operatorname{sen}\varphi(t)\,\mathbf{i} + \cos\varphi(t)\,\mathbf{j}],$$

Sendo $\omega(t) = \dfrac{d\varphi}{dt}$ sua velocidade angular,

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \omega(t)R[-\operatorname{sen}\varphi(t)\,\mathbf{i} + \cos\varphi(t)\,\mathbf{j}]}$$

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = R[\cos\varphi(t)\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\varphi(t)\,\mathbf{j}]}$$

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \omega(t)R[-\operatorname{sen}\varphi(t)\,\mathbf{i} + \cos\varphi(t)\,\mathbf{j}]}$$



A aceleração da partícula será

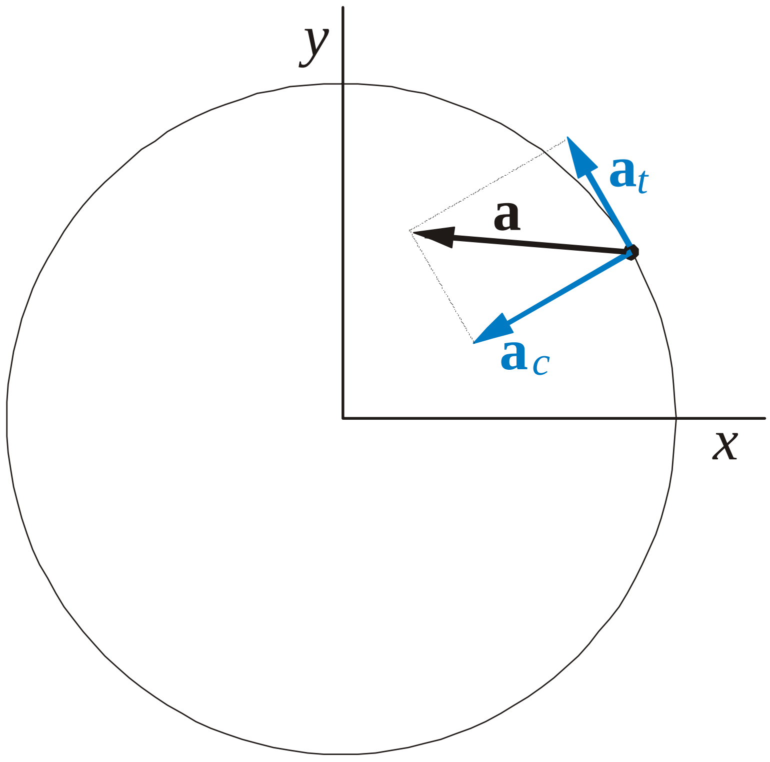
$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{a}(t) = \omega R\frac{d\varphi}{dt}[-\cos\varphi(t)\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\varphi(t)\,\mathbf{j}] + R\cdot\frac{d\omega}{dt}[-\operatorname{sen}\varphi(t)\mathbf{i} + \cos\varphi(t)\,\mathbf{j}]$$

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = -\omega^2 R[\cos\varphi(t)\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\varphi(t)\,\mathbf{j}] + R\cdot\frac{d\omega}{dt}[-\operatorname{sen}\varphi(t)\mathbf{i} + \cos\varphi(t)\,\mathbf{j}]}$$

De forma compacta

$$\mathbf{r}(t) = R\hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}(t) = \omega R\hat{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{a}(t) = -\omega^2 R\hat{\mathbf{r}} + \frac{d\mathrm{v}}{dt}\,\hat{\mathbf{v}}$$



$$\mathbf{r}(t) = R\hat{\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{v}(t) = \omega R\hat{\mathbf{v}},$$

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 R\hat{\mathbf{r}} + \frac{d\mathrm{v}}{dt}\hat{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_c(t) + \mathbf{a}_t(t)$$

$$\mathbf{a}_c(t) = -\omega^2 R\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a}_t(t) = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\hat{\mathbf{v}}$$

No movimento circular não-uniforme, a aceleração $\mathbf{a}$ tem duas componentes, a aceleração centrípeta $\mathbf{a}_c$ e a aceleração tangencial $\mathbf{a}_t$

A expressão para $\mathbf{a}(t)$ permanece válida para uma trajetória qualquer se R for tomado como o raio de curvatura local da curva.

Movimento de um projétil

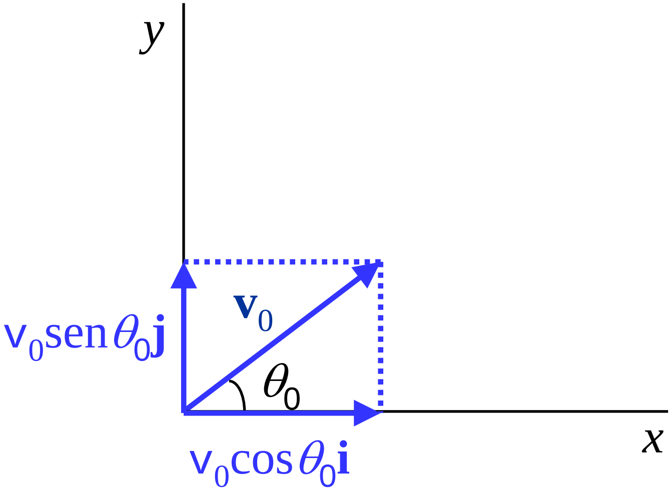
Todo corpo movendo-se próximo à superfície da Terra tem uma aceleração constante que aponta para o centro da Terra, cujo módulo é g, a aceleração da gravidade.

$$g = \frac{GM_T}{r^2}$$

Próximo à superfície da Terra, $r = R_T$ e $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Uma partícula é lançada com velocidade $\mathbf{v}_0$ de módulo v_0 fazendo um ângulo θ_0 com a horizontal:

$$\mathbf{v}_0 = \mathrm{v}_{0x}\mathbf{i} + \mathrm{v}_{0y}\mathbf{j} = \mathrm{v}_0 \cos\theta_0 \mathbf{i} + \mathrm{v}_0 \,\mathrm{sen}\,\theta_0 \mathbf{j}$$



A aceleracão da partícula será

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$$

Logo

$$a_x = 0 \quad \Rightarrow \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \int_{\mathrm{v}_{0x}}^{\mathrm{v}_x} d\mathrm{v}_x = 0$$

$$a_y = -g \quad \Rightarrow \frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = -g \quad \Rightarrow \int_{\mathrm{v}_{0y}}^{\mathrm{v}_y} d\mathrm{v}_y = -g\int_0^t dt$$

Integrando as equações acima tem-se

$$\boxed{\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_{0x}}$$

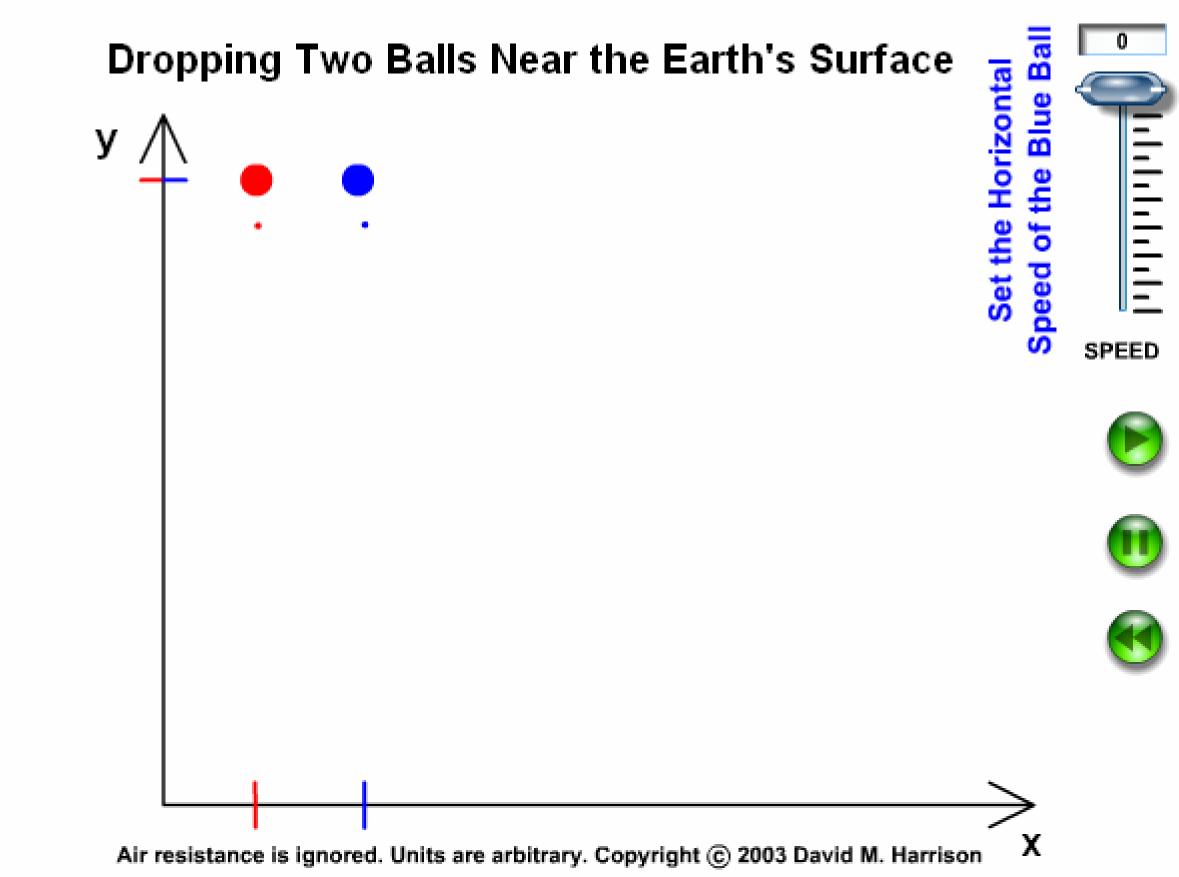
Em x: MRU

$$\boxed{\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_{0y} - gt}$$

Em y: MUV

A aceleração da gravidade não afeta a velocidade horizontal do projétil.

A aceleração da gravidade não é afetada pelo valor da velocidade horizontal.



Duas bolas são soltas do mesmo ponto. Uma delas tem velocidade inicial nula e a outra tem velocidade inicial na horizontal.

Em cada instante as duas bolas estão na mesma altura, ou seja, a velocidade horizontal da bola não afeta seu movimento na vertical.

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_{0x} \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \mathrm{v}_{0x} \quad \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \mathrm{v}_{0x} dt \quad \Rightarrow x - x_0 = \mathrm{v}_{0x} t$$

$$\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_{0y} - gt \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \mathrm{v}_{0y} - gt \quad \Rightarrow \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t (\mathrm{v}_{oy} - gt) dt \Rightarrow y - y_0 = \mathrm{v}_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sendo $x_0 = 0$ a posição inicial da partícula tem-se

$\boxed{x = \mathrm{v}_{0x} t}$ (1) e $\boxed{y = y_0 + \mathrm{v}_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2}$ (2)

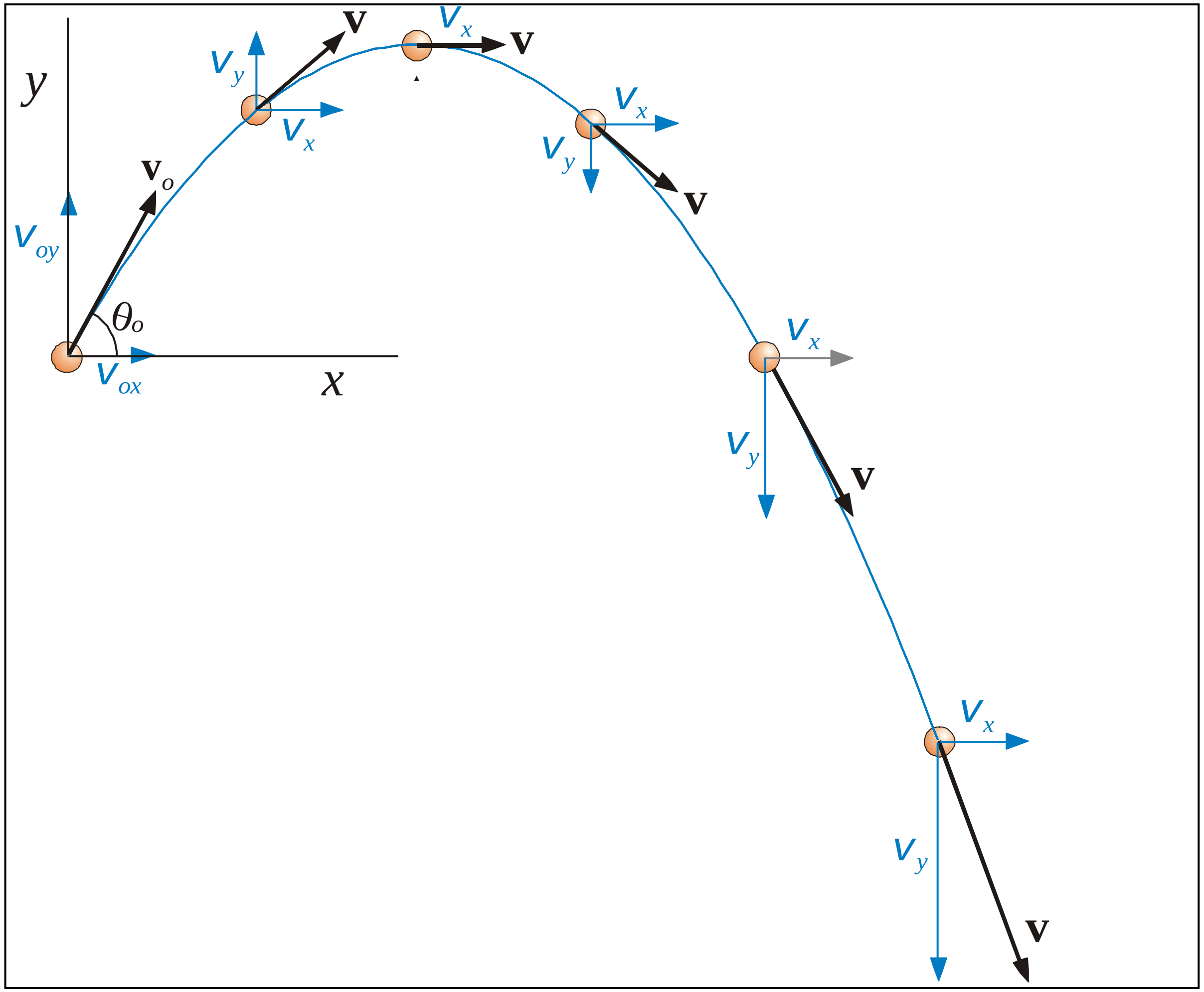
Usando (1) e (2) podemos eliminar t e obter a equação da trajetória de um projétil.

De (1) $t = \dfrac{x}{\mathrm{v}_{0x}}$ (3)

(3) em (2)

$$\boxed{y = y_0 + \frac{\mathrm{v}_{0y}}{\mathrm{v}_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{\mathrm{v}_{ox}^{\,2}} x^2}$$

A trajetória de um projétil é uma parábola.



$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{ox}^{\;2}} x^2$$

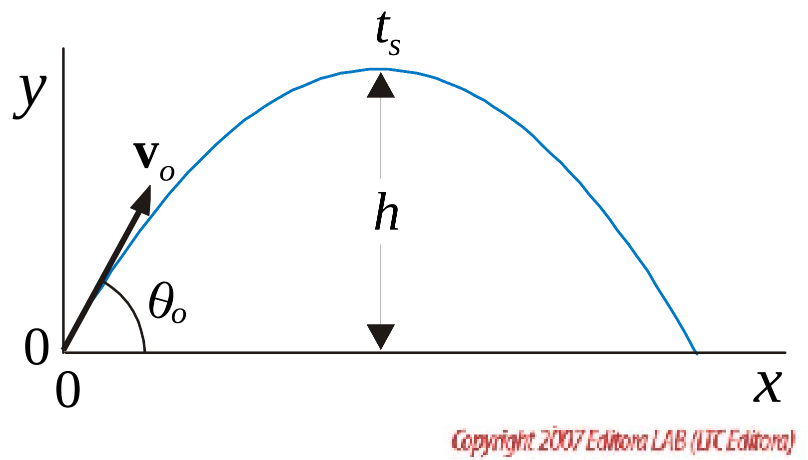
$$v_x = v_{0x}, \qquad v_y = v_{0y} - gt$$

Tempo de subida de um projétil (t_s)

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Na altura máxima do projétil, $v_y = 0$ e $t = t_s$

$$0 = v_{0y} - gt_s \quad \Rightarrow t_s = \frac{v_{0y}}{g}$$



Altura máxima de um projétil (h)

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$y = h$ quando $t = t_s$ $\quad \Rightarrow h = v_{0y}\dfrac{v_{0y}}{g} - \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{v_{0y}}{g}\right)^2 \quad \Rightarrow h = \dfrac{v_{0y}^2}{2g} \quad \Rightarrow h = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0}{2g}$

Alcance de um projétil (R)

válido somente se as alturas inicial e final forem iguais

Desprezando a resistência do ar, o tempo de subida do projétil é igual ao tempo de descida. Assim o alcance na horizontal corresponde ao instante $t=2t_s$.

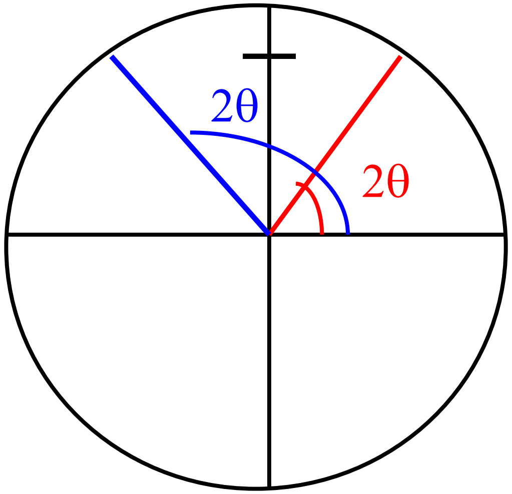
$$x = v_{0x}t \quad \Rightarrow R = v_{0x}2t_s \quad \Rightarrow R = v_{0x}2\frac{v_{0y}}{g} \quad \Rightarrow R = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{g} \quad \Rightarrow R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}2\theta}{g}$$

$$R = \frac{v_0^{\,2} \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

Alcance máximo: $\operatorname{sen} 2\theta = 1$, então $2\theta = 90^o$ e $\theta = 45^o$

Com exceção do alcance máximo ($2\theta = 90^o$), cada alcance pode ser atingido por dois ângulos diferentes.

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{Rg}{v_0^2}$$

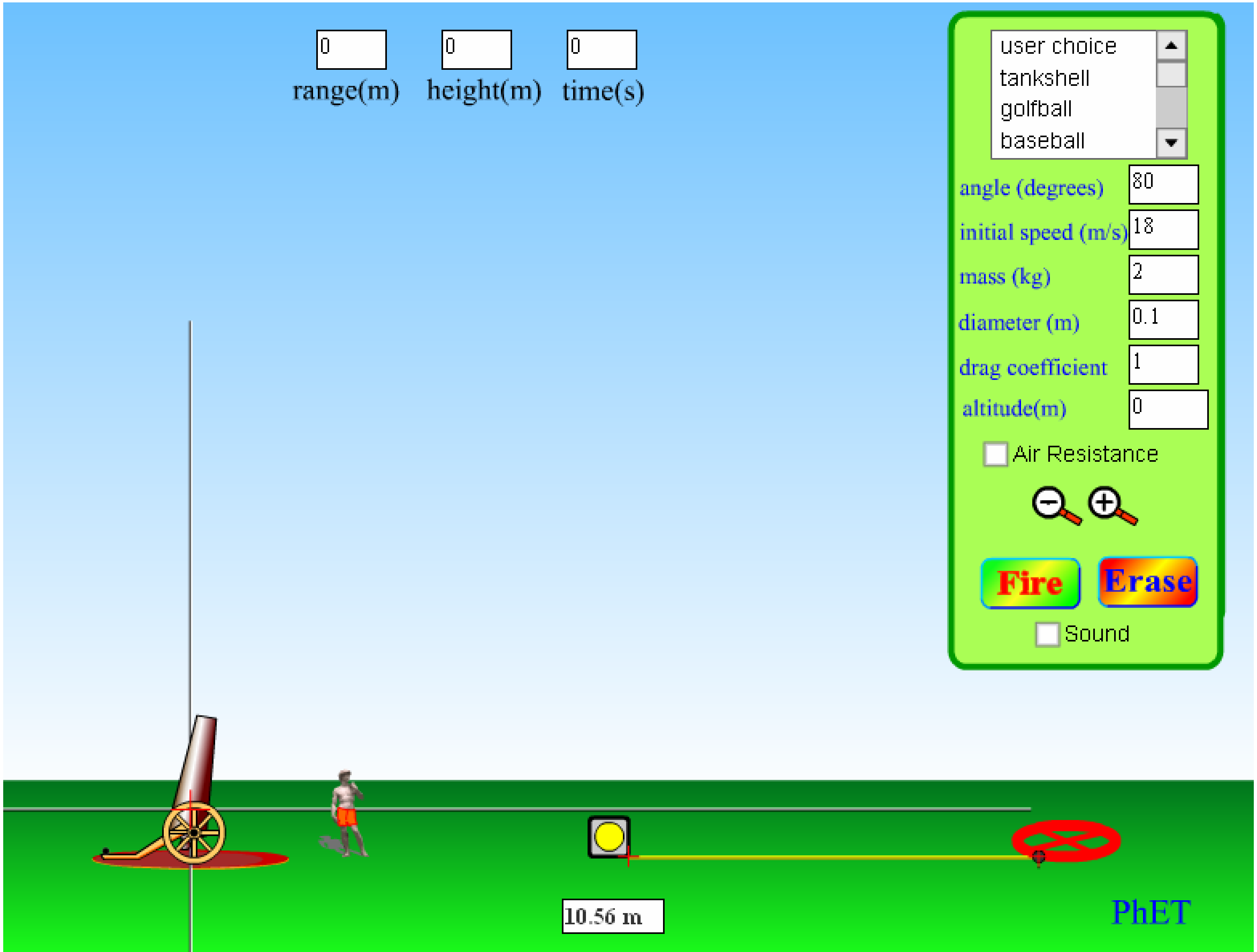


Exemplo

$$\operatorname{sen} 2\theta = 0,5$$

$$\Rightarrow 2\theta = 30^o \text{ ou } 2\theta = 180^o - 30^o = 150^o$$

$$\Rightarrow \theta = 15^o \text{ ou } \theta = 75^o$$

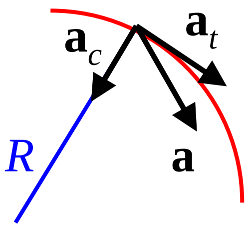


http://phet.colorado.edu $\theta=45^o$, $\theta=15^o$, $\theta=75^o$

Exemplo 5.2 – Um carro está num ponto de uma estrada onde a raio de curvatura é de 500 m. Sua velocidade é de 30 m/s e aumenta a uma taxa de 2,0 m/s^2. Calcule o módulo da aceleração do carro.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_t$$

Soma vetorial e $\mathbf{a}_c$ perpendicular a $\mathbf{a}_t$



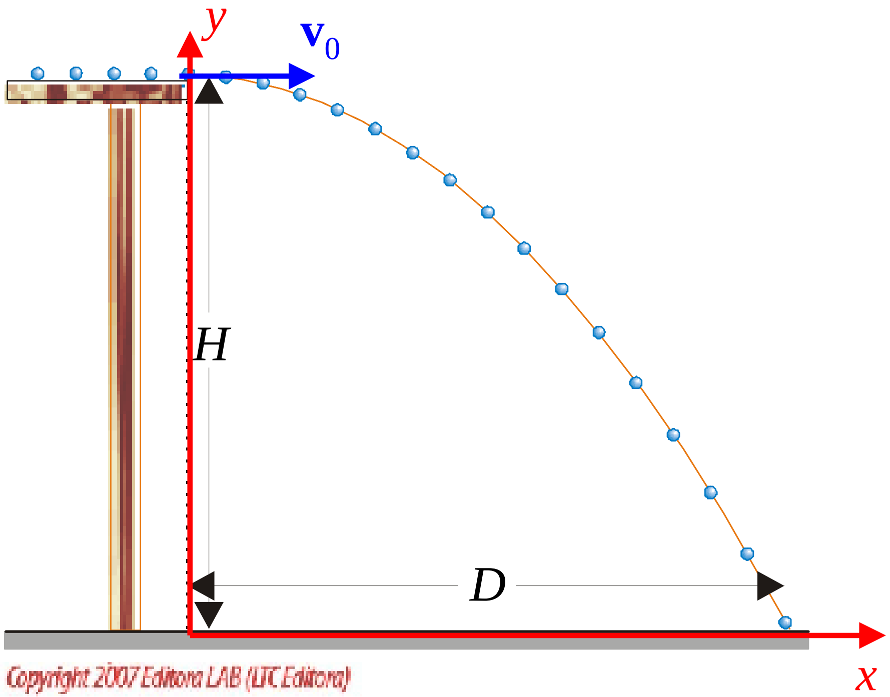
$$\Rightarrow a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

$$a_c = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \frac{30^2}{500}\ \mathrm{m/s^2} = 1{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_t = 2{,}0\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{1{,}8^2 + 2{,}0^2}\ \mathrm{m/s^2} = 2{,}7\ \mathrm{m/s^2}$$

Exemplo 5.3 - Um menino rola uma bolinha sobre uma mesa, e esta cai, de uma altura *H* (ver Figura abaixo). Se a velocidade inicial da bolinha é v_0 , a que distância *D* da projeção da borda da mesa ela atinge o piso?



Em *y*, MUV: $y = y_0 + v_{0y} - \frac{1}{2} g t^2$

$v_{0y} = 0,\ y_0 = H$

$\Rightarrow y = H - \frac{1}{2} g t^2$ (1)

Em *x*, MRU: $x = x_0 + v_x t$

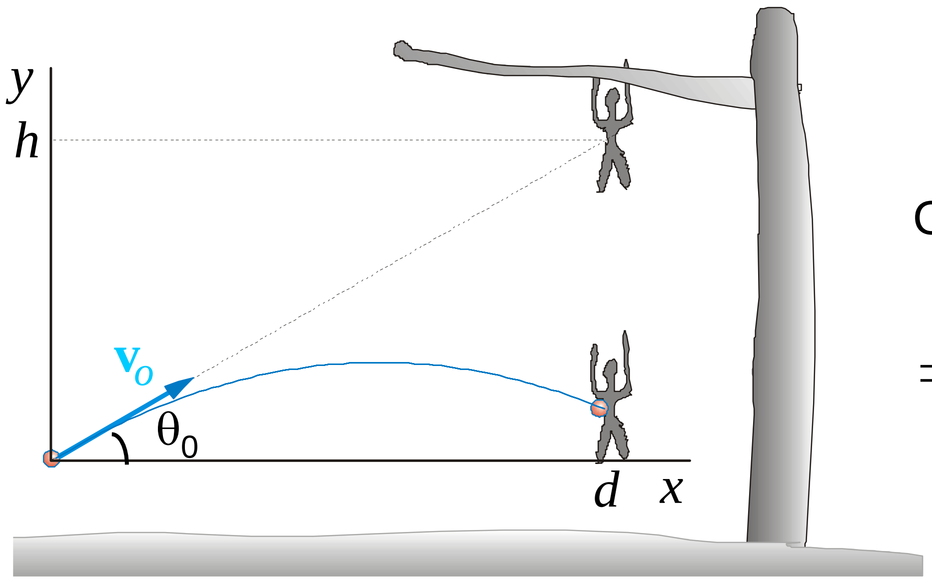
$v_x = v_0,\ x_0 = 0$

$x = v_0 t$ (2)

De (2) tem-se $t = \dfrac{x}{v_0}$. Substituindo este valor de *t* em (1): $y = H - \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{{v_0}^2}$

Quando $x = D,\ y = 0$ $\Rightarrow 0 = H - \dfrac{gD^2}{2{v_0}^2}$ $\Rightarrow D = v_0 \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

Exemplo 5.5 - A pedra acerta o mico? Um menino vê um mico pendurado em uma árvore e lhe atira uma pedra usando seu estilingue. Exatamente no instante em que a pedra é atirada, o mico solta-se do galho pretendendo cair ao solo e depois escapar da perseguição. Ficará o mico livre de ser atingido pela pedra ?



As coordenadas da pedra são

$$x_p = v_{0x} t$$

$$y_p = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

A pedra atinge $x_p = d$ em $t_d = \dfrac{d}{v_{0x}}$

$$\Rightarrow y_p = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} d - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_{0x}} \right)^2$$

O menino mira o mico $\Rightarrow \operatorname{tg} \theta_0 = \dfrac{h}{d} = \dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}$

$$\Rightarrow y_p = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_{0x}} \right)^2$$

A coordenada do mico é

$$y_m = y_{0m} + v_{0ym} t - \frac{1}{2} g t^2 = h - \frac{1}{2} g t^2$$

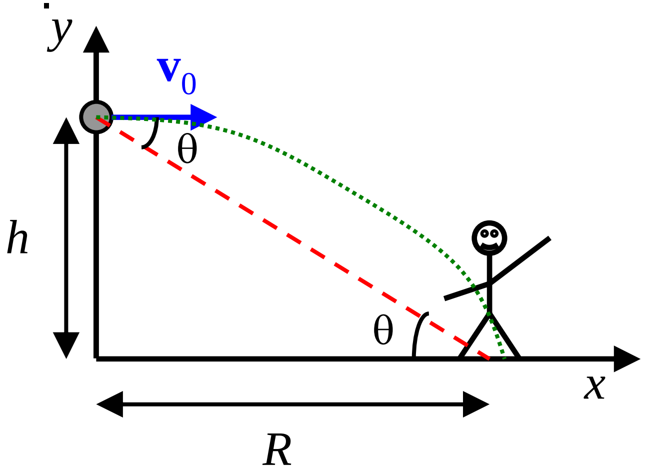
Quando $t = t_d$

$$y_m = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_{0x}} \right)^2$$

$y_m = y_p$, então o mico é atingido!

Problema 5.6 – Um avião pretende lançar equipamento de salvamento para um náufrago. O avião voa à altitude de 200 m, numa linha horizontal que passa sobre o náufrago, com velocidade de 300 km/h. O náufrago é observado por uma luneta que faz um ângulo θ com a horizontal. A que ângulo θ de visão o equipamento deve ser solto, para que ele caia próximo do náufrago?

.



$$\text{tg}\,\theta = \frac{h}{R}$$

Calcular R, ou seja, x quando y=0

$$\text{v}_0 = \text{v}_{0x}\,,\ x_0 = 0\ \text{m},\ y_0 = h$$

Em x, MRU

$$x = x_0 + \text{v}_{0x}t \Rightarrow x = \text{v}_0 t \qquad (1)$$

Em y, MUV: $y = y_0 + \text{v}_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

$$\Rightarrow y = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

De (1) $t = \frac{x}{\text{v}_0}$ em (2)

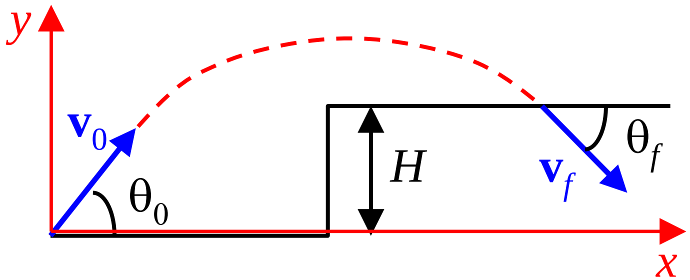
$$y = h - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\text{v}_0^2}$$

Quando y= 0, x=R $\Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{\text{v}_0^2}$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{2h\text{v}_0^2}{g} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2h}{g}}\text{v}_0 = 532{,}4\ \text{m}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{h}{R} = 0{,}376 \Rightarrow \theta = 20{,}6^\circ$$

Problema 5.8 – Um projétil é lançado com velocidade v_0=20 m/s fazendo um ângulo de 60º com a horizontal. Ele atinge um ponto em um plano elevado de uma altura H em relação ao ponto de lançamento. Sua trajetória final faz um ângulo de 45º com o plano. (a) Calcule o módulo da velocidade final do projétil. (b) Determine H.



a) Calcular v_f

Em x, MRU (v_x é constante)

$$\Rightarrow v_{fx} = v_{0x} \quad = v_0 \cos\theta_0$$

Mas $v_{fx} = v_f \cos\theta_f$

$$\Rightarrow v_f \cos\theta_f = v_0 \cos\theta_0$$

$$\Rightarrow v_f = v_0 \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta_f} = 14{,}1 \text{ m/s}$$

b) Calcular H

Em y, MUV

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

y_0= 0 m. Quando $y=H$, $t=t_f$

$$\Rightarrow H = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 \qquad (1)$$

Obter t_f

$$v_y = v_{0y} - gt \;\Rightarrow -v_f \operatorname{sen}\theta_f = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - g t_f$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0 + v_f \operatorname{sen}\theta_f}{g} = 2{,}78 \text{ s} \qquad (2)$$

(2) em (1), H = 10,3 m

Movimento relativo no espaço

Consideremos duas partículas cujas posições no instante t sejam $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$.

A posição da partícula 2 em relação à partícula 1 é definida pelo vetor

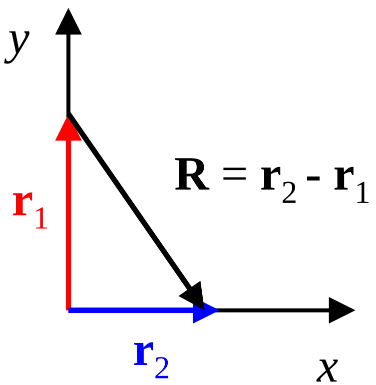
$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$$

A velocidade e a aceleração da partícula 2 em relação à partícula 1 são

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \quad \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{A} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$$

Exemplo 5.7 - No cruzamento de duas ruas, uma na direção Leste-Oeste e a outra na direção Norte-Sul, há um sinal luminoso. Um carro, indo para o Norte, passa pelo cruzamento com velocidade de 70 km/h, a qual é mantida constante. 10 s depois, o sinal abre para a outra rua e outro carro, indo para o Leste, arranca com aceleração constante de 5,0 (km/h)/s. Calcule a posição, velocidade e aceleração do segundo carro em relação ao primeiro 15 s após a arrancada do carro.



$$\mathbf{v}_1 = \mathrm{v}_{01}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_2 = (\mathrm{v}_{02} + a_2 t)\mathbf{i} = a_2 t\ \mathbf{i}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = a_2 t\ \mathbf{i} - \mathrm{v}_{01}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_1 = 0 \qquad \mathbf{a}_2 = a_2\mathbf{i}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = a_2\mathbf{i}$$

Escolhendo $t = 0$ o instante em que o segundo carro arranca:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{01} + \mathbf{v}_{01}t = (r_{01} + \mathrm{v}_{01}t)\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{02} + \mathbf{v}_{02}t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 t^2 = \frac{1}{2}a_2 t^2\ \mathbf{i}$$

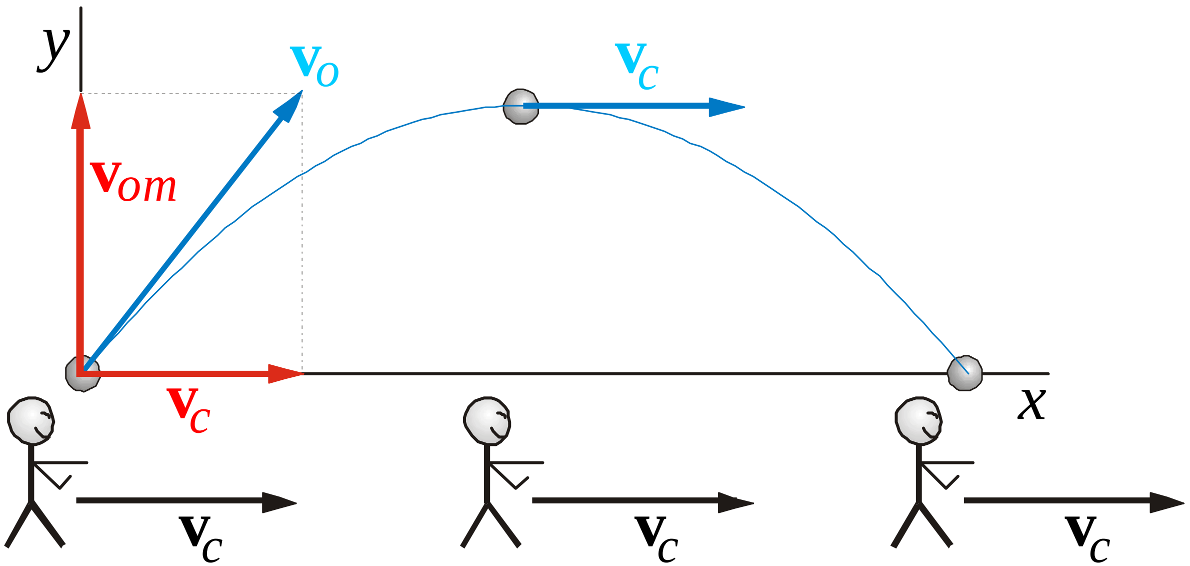
$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}a_2 t^2\ \mathbf{i} - (r_{01} + \mathrm{v}_{01}t)\mathbf{j}$$

Outro jeito:

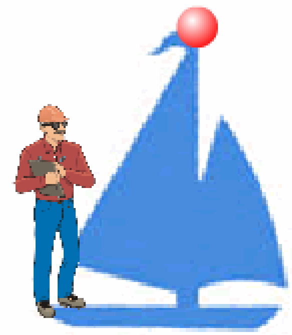
$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = a_2 t\ \mathbf{i} - \mathrm{v}_{01}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = a_2\mathbf{i}$$

Exemplo 5.8 - Um menino, viajando na carroceria de uma caminhonete que se move em uma pista horizontal, tenta descobrir em que direção tem de jogar uma pedra para cima para que ela caia de volta em suas mãos. Depois de algumas tentativas, descobre que tem de jogá-la na direção que lhe parece ser a vertical. Demonstre esse resultado.

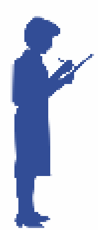


Dropping a Ball From the Top of the Mast of a Moving Sailboat



Frame of Reference Where the Boat is Stationary

Air resistance is negligible



Frame of Reference Where the Boat is Moving to the Right at Constant Speed

http://phet.colorado.edu