Capítulo 4

Vetores

Recursos com copyright incluídos nesta apresentação:

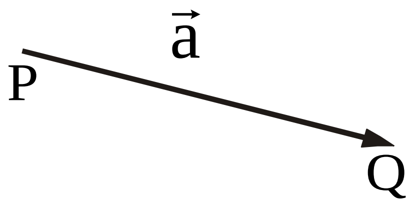
Grandezas escalares: massa, volume, temperatura, ...

Expressas por um número e unidade

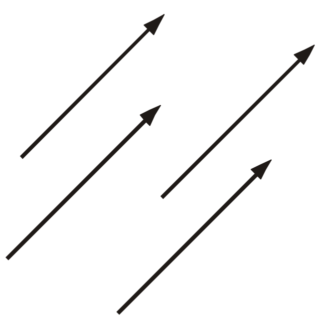
Grandezas vetoriais: deslocamento, força, ...

Requerem módulo, direção, sentido e unidade

Vetor deslocamento do ponto P ao ponto Q : $\vec{a}$ ou $\mathbf{a}$



Módulo do vetor $\mathbf{a}$: $|\mathbf{a}|$ ou a



Todas as setas representam o mesmo vetor

$\odot$ Vetor saindo da tela

$\otimes$ Vetor entrando na tela

Operacão com vetores – método geométrico

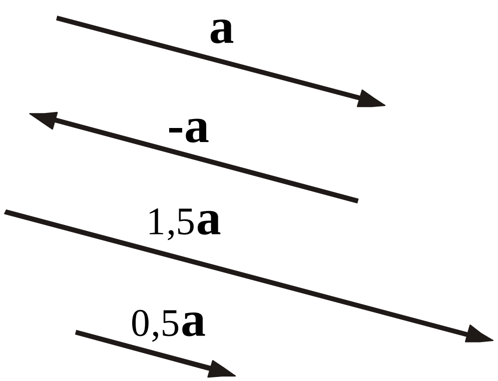
Multiplicação de um vetor por um número

Sendo λ um número real, $\lambda\mathbf{a}$ tem, por definição, a direção de $\mathbf{a}$

$\lambda < 0$, $\lambda\mathbf{a}$ tem sentido oposto de $\mathbf{a}$

$\lambda > 0$, $\lambda\mathbf{a}$ tem mesmo sentido de $\mathbf{a}$

$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda|\, a$



É útil separar o módulo de um vetor de sua direção e sentido. Para isto define-se a direção e sentido por

$$\hat{\mathbf{a}} \equiv \frac{\mathbf{a}}{a}$$

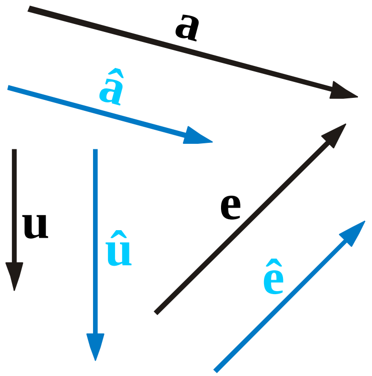
O vetor $\hat{\mathbf{a}}$ é denominado vetor unitário, pois possui módulo igual a 1

$$|\hat{\mathbf{a}}| = \frac{|\mathbf{a}|}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

O vetor $\mathbf{a}$ pode ser reescrito na forma

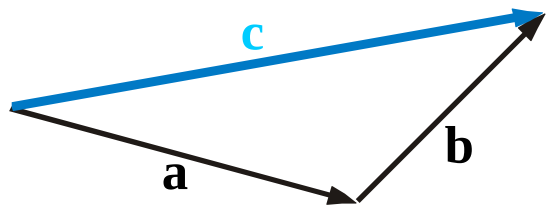
$$\boxed{\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{a}}}$$

Exemplos de vetores e seus unitários

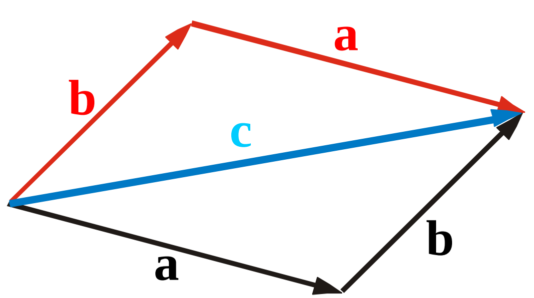


Soma de vetores

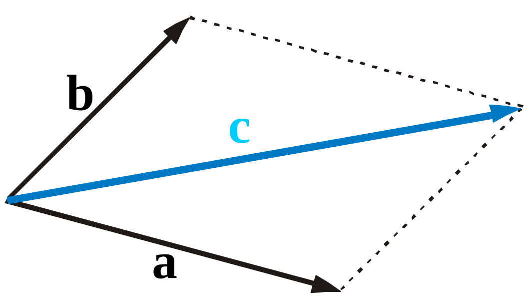
Define-se **c** como a soma de **a** com **b** : $\mathbf{c} \equiv \mathbf{a} + \mathbf{b}$



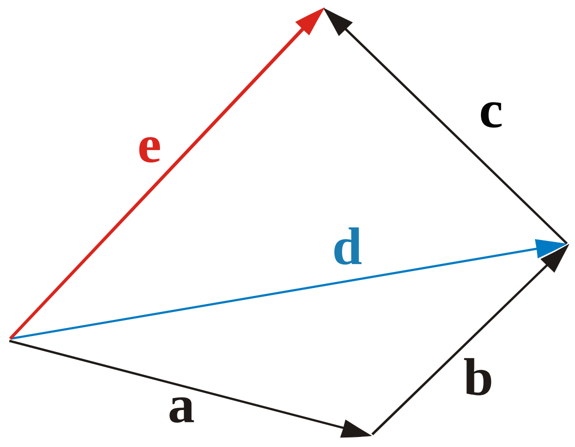
A soma de vetores é comutativa : $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

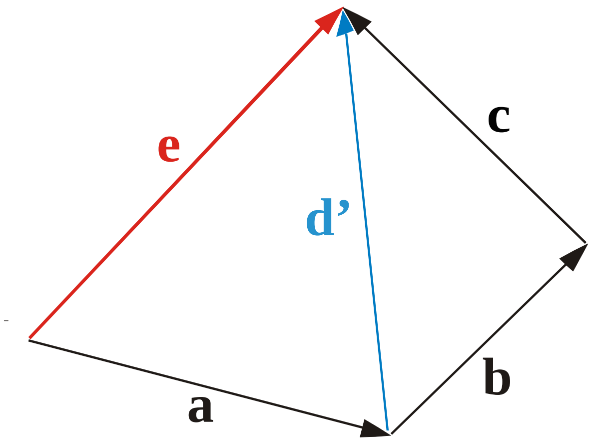


Logo



A soma de vetores é associativa: $\underbrace{(\mathbf{a} + \mathbf{b})}_{\mathbf{d}} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \underbrace{(\mathbf{b} + \mathbf{c})}_{\mathbf{d'}} = \mathbf{e}$

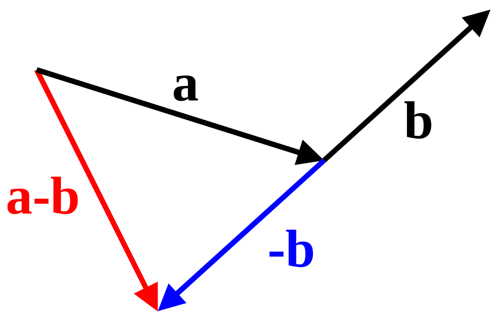


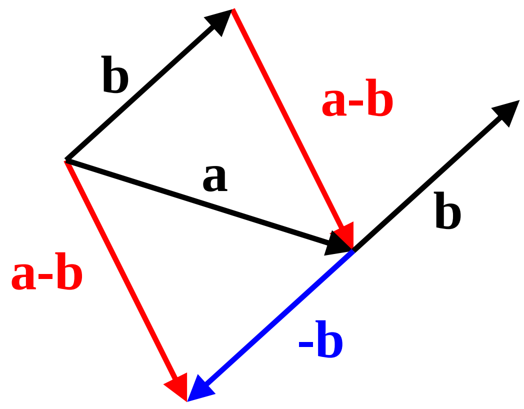


O vetor que representa a soma de dois ou mais vetores é chamado de vetor resultante

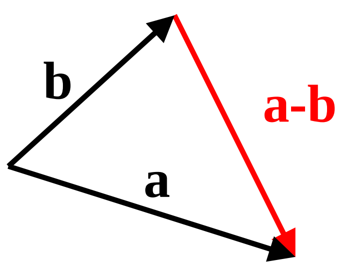
Subtração de vetores

Por definição $\mathbf{a} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

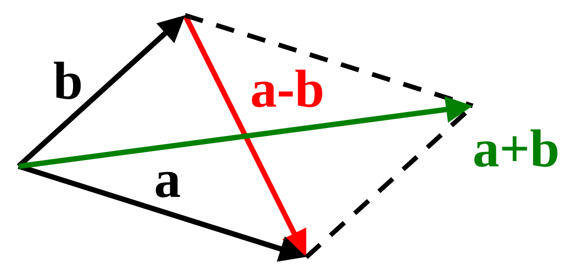




Logo

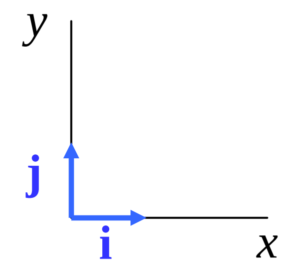


Então



Representação analítica de vetores

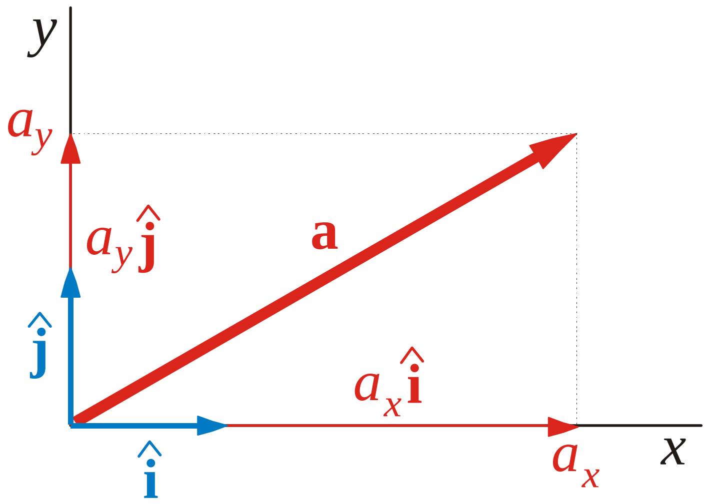
Representação cartesiana

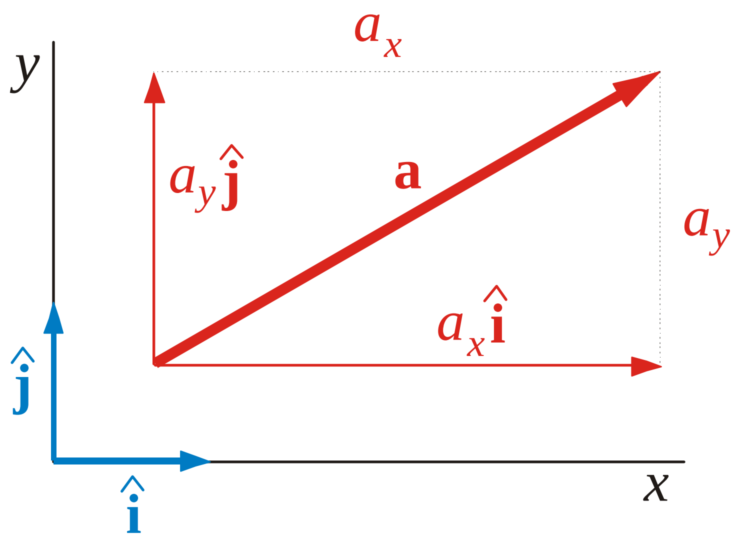


2D : vetores unitários **i** e **j** alinhados com os eixos x e y

O vetor **a** pode ser escrito como

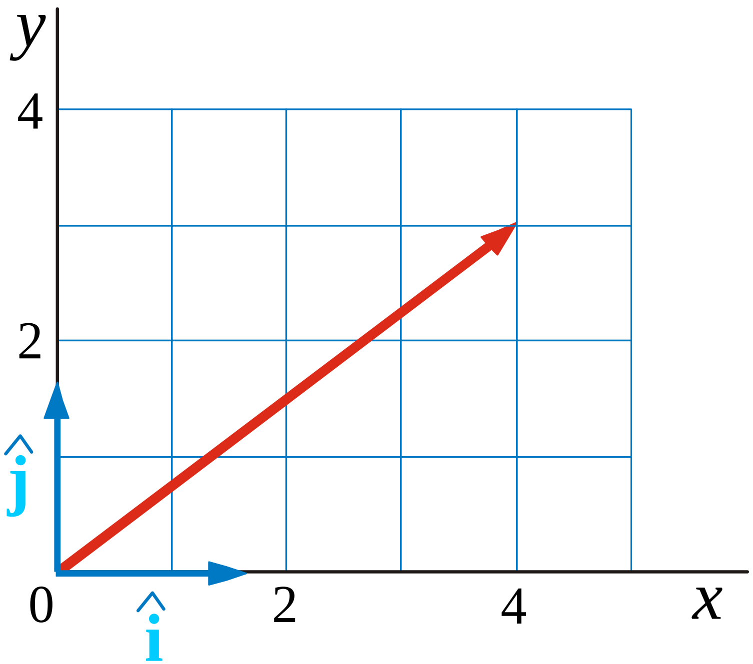
$\boxed{\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j}}$, onde $a_x\,\mathbf{i}$ e $a_y\,\mathbf{j}$ são as projeções do vetor **a** nos eixos x e y





Pelo teorema de Pitágoras $a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}}$

Exemplo 4.1 - Escreva a expressão analítica do vetor a mostrado na Figura abaixo e calcule seu módulo.



$a_x = 4$ e $a_y = 3$

Portanto

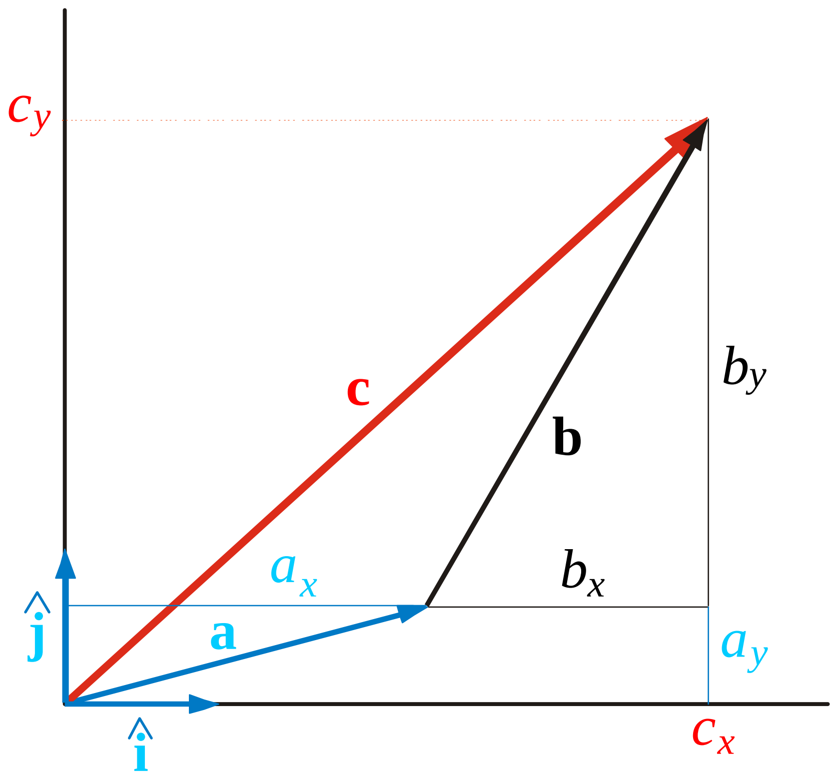
$$\mathbf{a} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$$

$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Multiplicar um vetor por um número λ equivale a multiplicar suas componentes por λ

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x)\hat{\mathbf{i}} + (\lambda a_y)\hat{\mathbf{j}}$$

Somar dois vetores equivale a somar suas componentes em cada direção



$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}}$$

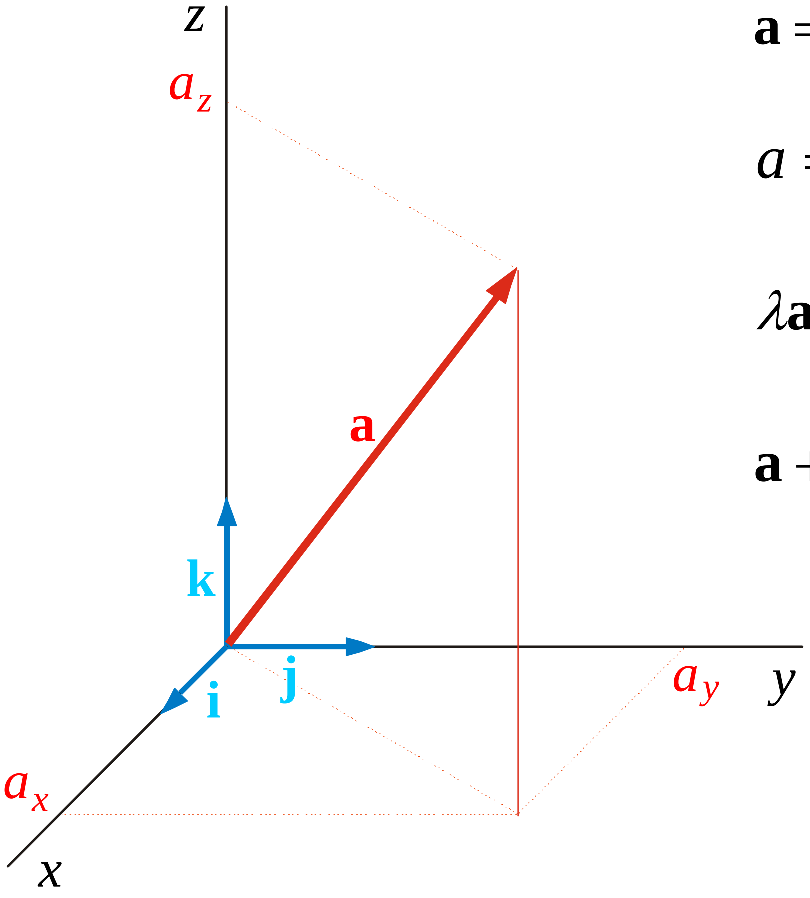
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

3D: vetores unitários $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ alinhados com os eixos x, y e z



$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$$

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda a_x\mathbf{i} + \lambda a_y\mathbf{j} + \lambda a_z\mathbf{k}$$

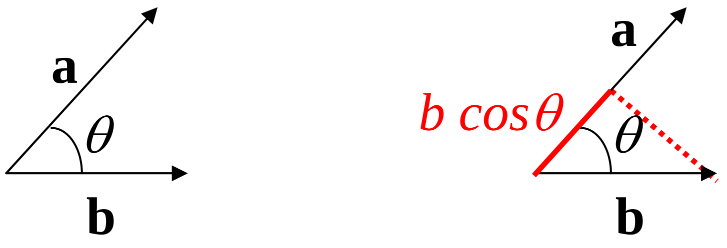
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}$$

Produto escalar de vetores

Define-se o produto escalar dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, designado pelo símbolo $\mathbf{a.b}$, por

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv ab\cos\theta}$$

onde θ é o ângulo formado pelos dois vetores.



Este produto é uma grandeza escalar.

Ele é igual ao produto do módulo de um dos vetores pela projeção do outro sobre ele.

Usando a definição de produto escalar: $\mathbf{a.b} = ab\cos\theta$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$$

$\mathbf{a.b} = 0$ se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são ortogonais, ou $\mathbf{a}=0$, ou $\mathbf{b}=0$.

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$$

Se λ e η são dois escalares

$$(\lambda\mathbf{a})\cdot(\eta\mathbf{b}) = \lambda\eta\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

O produto escalar é distributivo

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

Expressando os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em termos de suas componentes cartesianas e utilizando as propriedades anteriores

$$\mathbf{a.b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})$$

$$\mathbf{a.b} = a_x b_x \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + a_y b_x \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}$$
$$+ a_y b_z \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + a_z b_x \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.$$

Logo $\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$

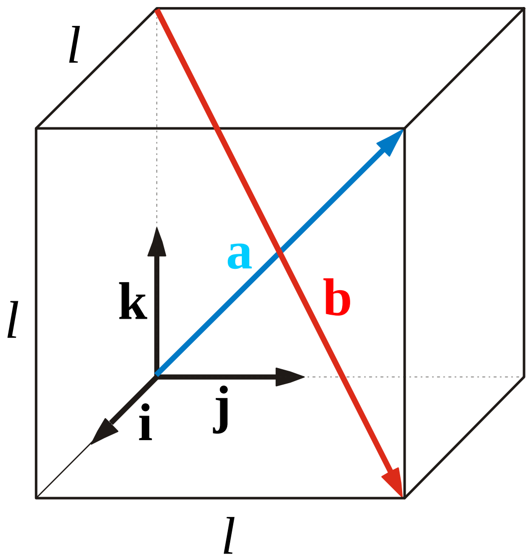
Lembramos que $\boxed{\mathbf{a.b} = ab\cos\theta}$

Logo $ab\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$

útil para determinar o ângulo entre dois vetores

Exemplo - Calcule o ângulo entre as diagonais de um cubo.

Solução – A Figura abaixo mostra os vetores **a** e **b** cujas flechas coincidem com duas diagonais de um cubo. Da figura, obtemos



$$\mathbf{a} = l(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{b} = l(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab}\right)$$

$$a = b = l\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}\,l$$

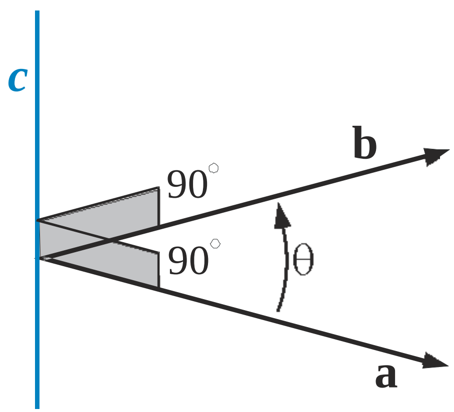
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = l^2(1+1-1) = l^2$$

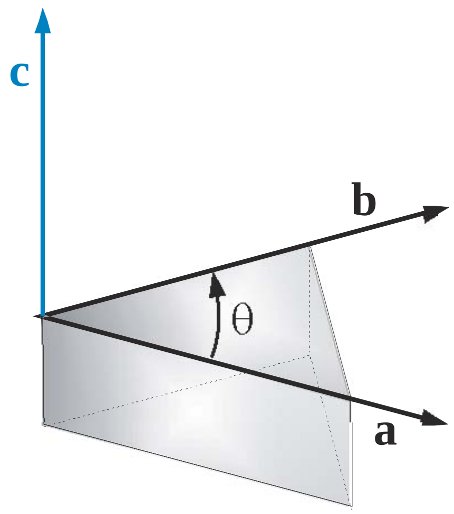
$$\theta = \arccos\left(\frac{l^2}{3l^2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70,5°$$

Produto vetorial de vetores

O produto vetorial dos vetores **a** e **b** é designado pelo símbolo **a** x **b**

Em 3D, dois vetores quaisquer **a** e **b** definem uma direção única, a direção perpendicular a ambos, se eles não forem paralelos.





Convenciona-se o sentido de **c** = **a** x **b** arbitrariamente pela regra da mão direita.

Se **a** e **b** forem paralelos não é possível definir uma direção a partir deles.

Isto é resolvido se o módulo de **c** for definido por

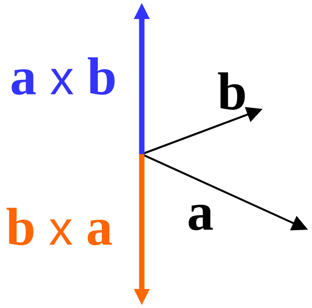
$$\boxed{c = ab\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

onde θ é o ângulo entre **a** e **b**

Se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, tem-se $c = 0$

No produto vetorial, a ordem dos fatores altera o produto.
O produto vetorial é anticomutativo.

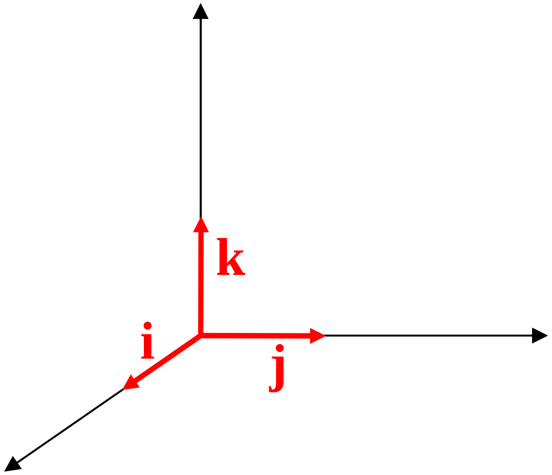
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$



Os eixos cartesianos foram escolhidos de modo que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$

Qualquer permutação cíclica dos três vetores preserva o triedro direito:
$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$

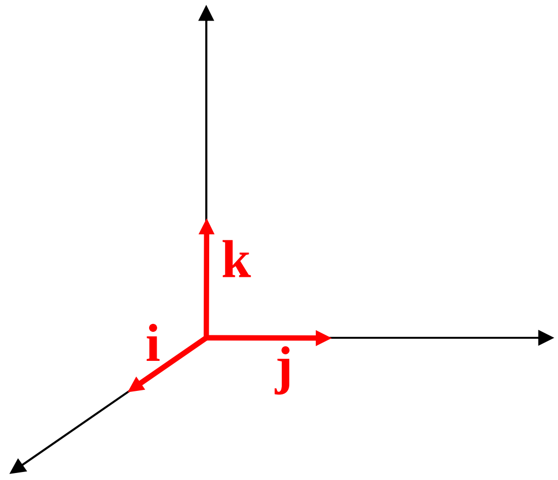
Por outro lado $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ e $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$



O produto vetorial é distributivo

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

Forma analítica do produto vetorial



$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})$$

$$= a_x b_y\,\mathbf{i}\times\mathbf{j} + a_x b_z\,\mathbf{i}\times\mathbf{k} + a_y b_x\,\mathbf{j}\times\mathbf{i}$$

$$+ a_y b_z\,\mathbf{j}\times\mathbf{k} + a_z b_x\,\mathbf{k}\times\mathbf{i} + a_z b_y\,\mathbf{k}\times\mathbf{j}$$

Logo

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{i}\,(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}\,(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k}\,(a_x b_y - a_y b_x)$$

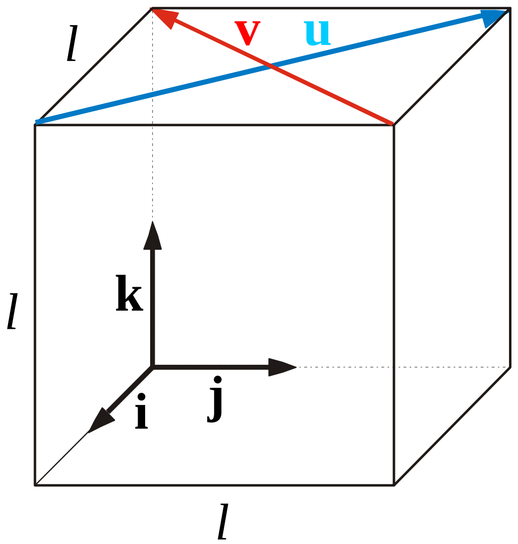
A equação anterior pode ser reescrita na forma de um determinante

$$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}$$

O produto vetorial só é definido em um espaço de três dimensões.

Exemplo - Calcule o produto dos vetores **u** e **v** mostrados na Figura abaixo

Solução - Pela regra da mão direita, conclui-se que **u** x **v** é paralelo ao unitário **k**.



Logo

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = uv \operatorname{sen} \theta \mathbf{k}$$

onde θ é o ângulo entre **u** e **v**

$$\theta = \pi / 2 \quad \text{e} \quad u = v = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2}\, l$$

Portanto $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 2l^2 \mathbf{k}$

Produto misto de vetores

O produto misto de vetores é definido por

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = a_x(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_x + a_y(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_y + a_z(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_z$$

Ele pode ser escrito como

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}$$

Um determinante é invariante a permutações cíclicas de suas linhas. Logo

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$$

Por outro lado, como $\mathbf{b}\times\mathbf{c} = -\mathbf{c}\times\mathbf{b}$ concluímos que

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \text{-}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b})$$

Caráter tensorial das grandezas físicas

As leis físicas são expressas na forma de equações matemáticas envolvendo grandezas físicas.

Estas leis não discriminam direções distintas do espaço.

Ao girarmos o aparato de uma experiência, as grandezas nela envolvidas podem ser afetadas por tal operação.

Escalares são invariantes mediante uma rotação. Vetores mudam mediante uma rotação.

Para que as equações que expressam as leis físicas sejam invariantes mediante uma reorientação no espaço, as grandezas físicas têm que se transformar de maneira muito específica quando giradas no espaço.

Tais grandezas são chamadas de tensores.

Escalares e vetores são tipos de tensores. Escalar é um tensor de ordem zero e vetor é um tensor de ordem um.

Para que uma equação fique invariante mediante uma rotação, ela tem que ser da forma:

escalar A = escalar B
vetor A = vetor B