Capítulo 12

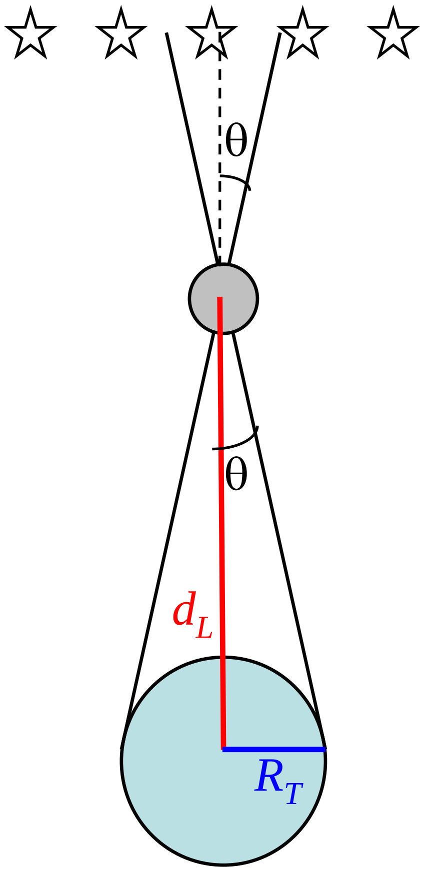
Gravitação

Recursos com copyright incluídos nesta apresentação:

Introdução

A lei da gravitação universal é um exemplo de que as mesmas leis naturais se aplicam em qualquer ponto do universo.

Fim da dicotomia entre o céu e a Terra.



Formulação feita por Newton (~1667)

Comparação entre as acelerações da Lua e de um objeto que cai próximo à superfície da Terra.

Lua próxima da Terra → distância Terra-Lua pode ser medida por paralaxe:

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{R_T}{d_L} \Rightarrow d_L = \frac{R_T}{\mathrm{tg}(\theta)} = 3{,}84 \times 10^8 \,\mathrm{m}$$

Considerando a órbita da Lua circular com raio d_L e período P=27,3 dias:

$$v = \frac{2\pi d_L}{P} = 1{,}02 \times 10^3 \,\mathrm{m/s} \quad \text{e} \quad a_L = \frac{v^2}{d_L} = 2{,}73 \times 10^{-3} \,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_L = \frac{\mathrm{v}^2}{d_L} = 2,73 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$

Aceleração de um objeto caindo próximo à superfície da Terra: $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$

A razão entre a aceleração do objeto em queda e a aceleração da Lua é:

$$\frac{g}{a_L} = \frac{9,80}{2,73 \times 10^{-3}} = 3,59 \times 10^3 \cong 3600 = (60)^2 \qquad (1)$$

A razão entre o raio da órbita lunar e o raio da Terra é:

$$\frac{d_L}{R_T} = \frac{3,84 \times 10^8\,\mathrm{m}}{6,37 \times 10^6\,\mathrm{m}} = 60,3 \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2)

$$\frac{g}{a_L} = \left(\frac{R_T}{d_L}\right)^{-2} \longrightarrow$$

Newton concluiu que a atração da Terra sobre um objeto, esteja ele próximo ou longe da superfície da Terra, é proporcional à massa do objeto e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o objeto e o centro da Terra.

Ação e reação: a força que a Terra exerce na Lua tem o mesmo módulo que a força que a Lua exerce na Terra. Então, $F \propto M_T M_L$.

Juntando tudo:

$$F \propto \frac{mM_T}{r^2}$$

Lei da gravitação

$$\boxed{\mathbf{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r}}$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

$G = 6{,}67260 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$

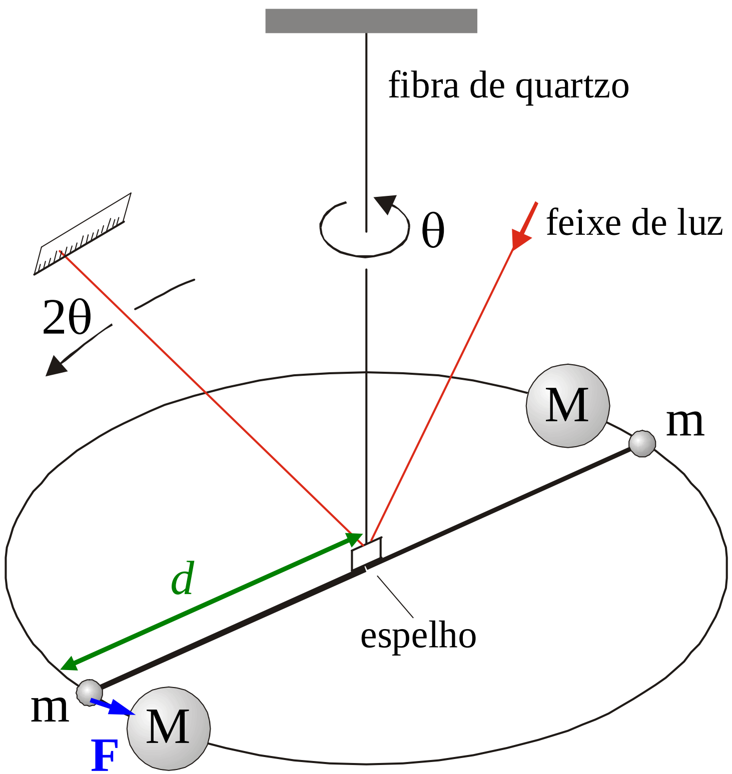
Valor muito pequeno. Só foi determinado em 1798 por Henry Cavendish, mais de um século após a formulação da lei de gravitação por Newton.

Força gravitacional:

- a única que atua em todas as partículas da Natureza
- a mais fraca das forças fundamentais
- força de longo alcance ($\alpha\ r^{-2}$)
- sempre atrativa

A experiência de Cavendish

Balança de torção



Um torque τ no fio provoca uma torção de θ

$$\tau = -\kappa\theta \quad = Fd \quad = -G\frac{mM}{r^2}d$$

$\kappa \rightarrow$ constante de torção do fio

$$\Rightarrow \kappa\theta = G\frac{mM}{r^2}d \quad \Rightarrow G = \frac{\kappa\theta r^2}{mMd}$$

Como $g = G\dfrac{M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow M_T = \dfrac{gR_T^2}{G}$

Primeiro cálculo da massa da Terra

As massas dos planetas do sistema solar foram obtidas sabendo a aceleração de um de seus satélites em torno deles.

Campo gravitacional

O campo gravitacional é descrito pela aceleração da gravidade $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ definida por

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m}$$

onde m é uma massa de prova situada em $\mathbf{r}$.

A aceleração da gravidade gerada por uma partícula de massa M, situada no ponto $\mathbf{r} = 0$, é dada por

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

Dada uma distância ao centro da Terra, tem-se um valor de g

Mas na Terra real:

• A crosta terrestre não é uniforme. Ao se medir g precisamente obtém-se informação sobre variações de densidade que são úteis, por exemplo, na prospecção de petróleo.

• A Terra não é uma esfera e sim um elipsóide achatado nos pólos, então $g_{\text{pólo}}$ é maior do que g_{equador} , pois $r_{\text{pólo}} < r_{\text{equador}}$. $g_{\text{pólo}} \sim 9.83\ \text{m/s}^2$ e $g_{\text{equador}} \sim 9.78\ \text{m/s}^2$.

• A Terra está em rotação. A leitura da balança seria igual à força gravitacional somente se a superfície da Terra fosse um referencial inercial. Na verdade temos

$$N - mg_0 = -ma_c \Rightarrow N = m(g_0 - \omega^2 R_T) = mg \Rightarrow g = g_0 - \omega^2 R_T \Rightarrow g_0 - g = \omega^2 R_T = 0{,}034\ \text{m/s}^2$$

aceleração que sentimos

Vimos que $g = g_0 - \omega^2 R_T$ para um corpo na superfície da Terra.

aparente

devido à atração gravitacional da Terra

devido à rotação da Terra

Contrariamente à impressão de que a aceleração da gravidade (g_0) diminui a zero em um ônibus espacial em órbita da Terra, na verdade obtém-se $g_0 = 8{,}7\ \mathrm{m/s^2}$ para uma altitude de $400\ \mathrm{km}$ acima da superfície da Terra.

O que ocorre nesta situação é que a força de atração gravitacional atua como força centrípeta.

$$\frac{GmM_T}{r^2} = m\omega^2 r \quad \Rightarrow \frac{GM_T}{r^2} = g_0 = \omega^2 r$$

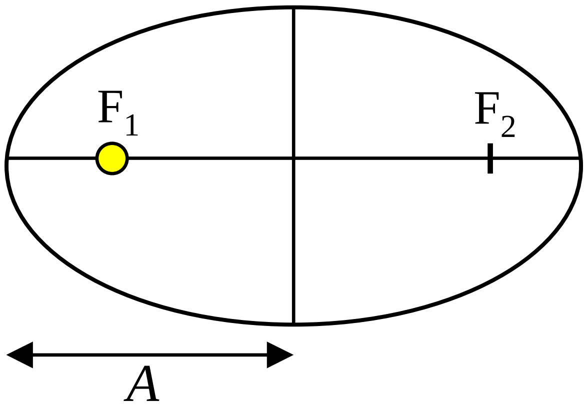
$$\Rightarrow g = g_0 - \omega^2 r = \omega^2 r - \omega^2 r = 0$$

Assim, a gravidade aparente é nula, mas o astronauta em órbita ainda está sujeito à força de atração gravitacional da Terra dada por $\frac{GmM_T}{r^2} = mg_0 \neq 0$

Leis de Kepler

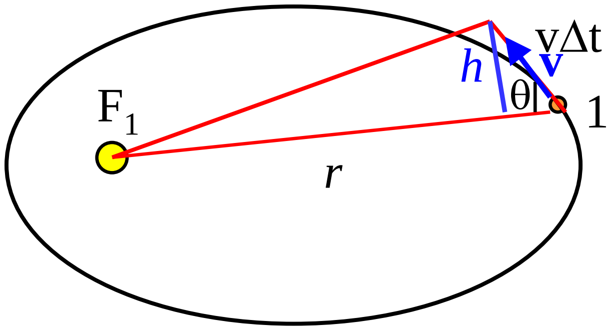
A aceitação e importância dada à teoria da gravitação de Newton quando foi proposta se deve ao fato de ser possível deduzir matematicamente, a partir dela, as três leis de Kepler (1571-1630). Estas já eram conhecidas na época de Newton, mas eram leis empíricas, baseadas apenas em resultados observacionais.

Primeira lei - Os planetas movem-se em órbitas elípticas em que o Sol ocupa um dos focos.



A demonstração desta lei fica para um curso mais avançado de mecânica.

Segunda lei - Em cada órbita, o seguimento de reta que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.



No ponto 1 a velocidade do planeta é v.

Se o planeta continuasse em MRU, após Δt o segmento que une o planeta ao Sol teria varrido o triângulo vermelho indicado na figura.

A área do triângulo é $\Delta A = \frac{1}{2} r h = \frac{1}{2} r \,\mathrm{v}\Delta t \,\mathrm{sen}\,\theta$ (1)

O momento angular orbital do planeta é $L = r\, m\mathrm{v}\,\mathrm{sen}\,\theta \;\Rightarrow r\,\mathrm{v}\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{L}{m}$ (2)

(2) em (1)

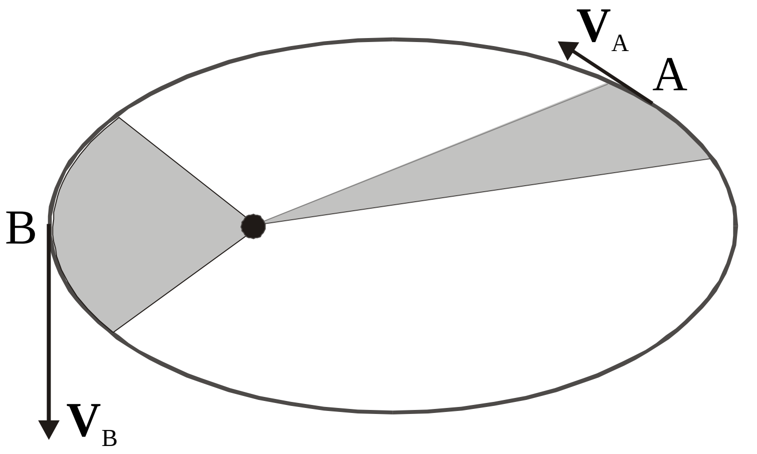
$$\Delta A = \frac{1}{2}\frac{L}{m}\Delta t \quad \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{L}{m}$$

No limite em que $\Delta t \rightarrow 0$ a área do triângulo descreve exatamente a área real varrida pelo planeta.

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{m}$$

Em relação ao Sol, a força gravitacional, que é radial, não realiza torque sobre o planeta. Assim L é constante e $\frac{dA}{dt}$ também.

Segunda lei de Kepler



O planeta percorre uma órbita elíptica em que o Sol ocupa um dos focos. Devido à conservação do momento angular do planeta em relação ao Sol, nos pontos da órbita mais próximos do Sol, o planeta aumenta sua velocidade de forma que as áreas (sombreadas) varridas em tempos iguais são também iguais.

Terceira lei - Os quadrados dos períodos das órbitas dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das respectivas elipses: $T^2 \propto A^3$

No caso de órbitas circulares, onde os semi-eixos maior e menor são iguais ao raio do círculo, é fácil mostrar este resultado.

A força gravitacional do Sol sobre um planeta atua como uma força centrípeta.

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{m\mathrm{v}^2}{r} \qquad (1)$$

O período da órbita é dado por

$$T = \frac{2\pi r}{\mathrm{v}} \quad \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\mathrm{v}^2} \qquad (2)$$

De (1) $\mathrm{v}^2 = G\dfrac{M}{r}$ (3)

(3) em (2)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

Evidência da terceira lei de Kepler.
A razão entre o cubo do semi-eixo maior da órbita e o quadrado do período é a mesma para todos os planetas.

Planeta	A (10^6 km)	T (anos)	A^3/T^2 (10^{24}km^3/ano^2)
Mercúrio	57,9	0,241	**3,34**
Vênus	108,2	0,615	**3,35**
Terra	149,6	1,000	**3,35**
Marte	227,9	1,88	**3,35**
Júpiter	778,3	11,86	**3,35**
Saturno	1427	29,5	**3,34**
Urano	2870	84,0	**3,35**
Netuno	4497	165	**3,34**

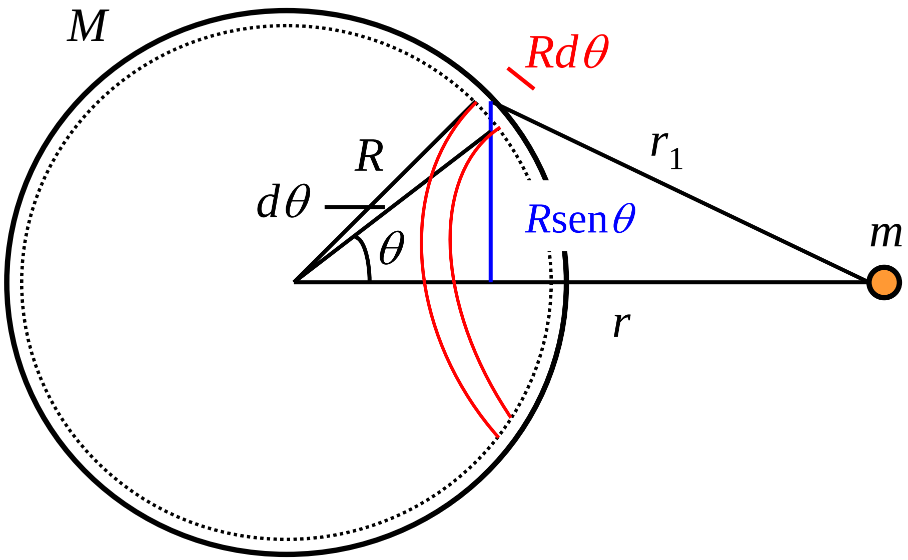
Interação entre uma partícula e uma casca esférica

Ao formular a lei da gravitação, Newton supôs que a Terra atrai qualquer corpo externo a ela como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro.

Ou seja, um corpo com simetria esférica atua gravitacionalmente em pontos em seu exterior como se toda a massa estivesse em seu centro.

Em 1685 Newton mostrou que isto é verdade e decorre da lei dos inversos dos quadrados. O teorema das cascas esféricas é importante tanto na gravitação quanto no eletromagnetismo.

Calcular a força gravitacional de uma casca esférica homogênea de massa M e raio R sobre uma partícula de massa m a uma distância r do centro da casca.



A área da casca esférica é $A = 4\pi R^2$

A casca esférica é dividida em anéis em cujos eixos de simetria se situa m.

A área de um dado anel é

$$dA' = 2\pi \cdot R\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot R d\theta$$

Assim, a massa do anel será

$$dM = \frac{M}{A} dA' = \frac{M}{2} \mathrm{sen}\,\theta \; d\theta$$

A energia potencial gravitacional do sistema anel-partícula será

$$dU = -GmdM \frac{1}{r_1} = -\frac{1}{2} GmM \frac{\mathrm{sen}\,\theta d\theta}{r_1}$$

r_1 depende de θ!

$$r_1^2 = R^2 \mathrm{sen}^2\,\theta + (r - R\cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow r_1^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta$$

$$\Rightarrow 2r_1 dr_1 = 2rR\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{sen}\,\theta d\theta}{r_1} = \frac{dr_1}{rR}$$

$$\Rightarrow dU = -GmM \frac{dr_1}{2rR}$$

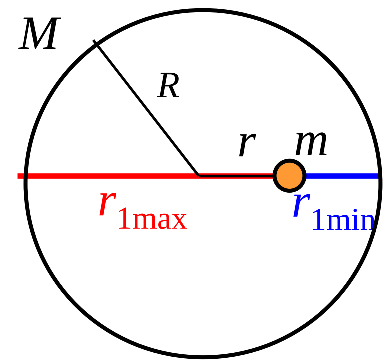
$$dU = -GmM\,\frac{dr_1}{2rR}$$

r_1 varia entre $r_{1\min}$ e $r_{1\text{máx}}$

$$\Rightarrow U = -\frac{GmM}{2rR}\int_{r_{1\min}}^{r_{1\max}} dr_1$$

$$\Rightarrow U = -\frac{GmM}{2rR}\left(r_{1\max} - r_{1\min}\right)$$

Partícula *m* **dentro** da casca esférica



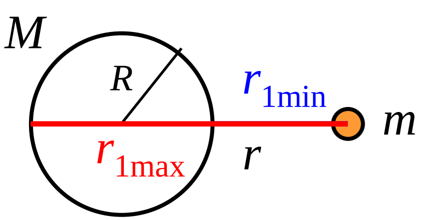
$r_{1\min} = R - r$

$r_{1\max} = R + r$

$r_{1\max} - r_{1\min} = 2r$

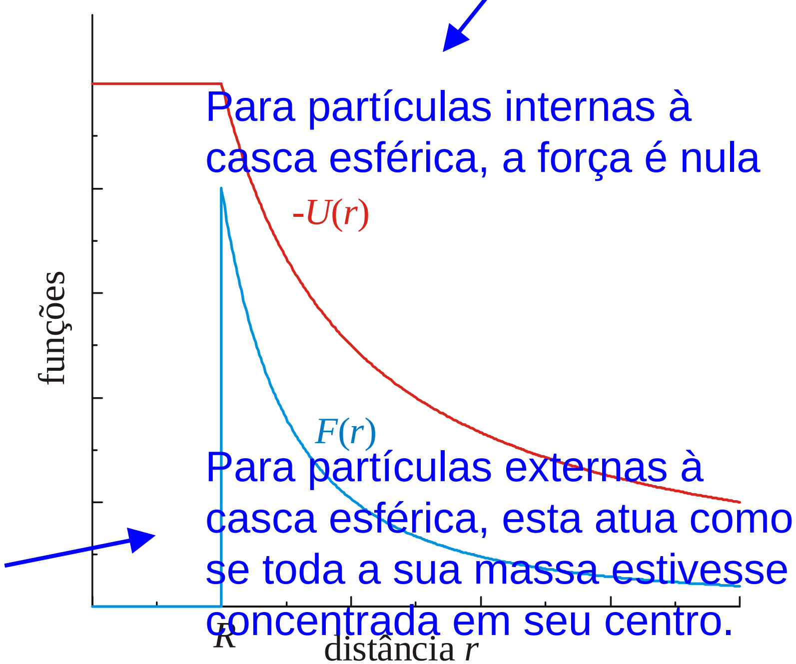
$$\Rightarrow U = -\frac{GmM}{R} \quad \Rightarrow F = -\frac{dU}{dr} = 0$$

Partícula *m* **fora** da casca esférica



$$\left.\begin{aligned} r_{1\min} &= r - R \\ r_{1\max} &= r + R \end{aligned}\right\} \; r_{1\max} - r_{1\min} = 2R$$

$$\Rightarrow U = -\frac{GmM}{r} \quad \Rightarrow \boxed{F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{GmM}{r^2}}$$



Para partículas internas à casca esférica, a força é nula

Para partículas externas à casca esférica, esta atua como se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro.

Exemplo – O Sol está à distância de $2{,}5\text{x}10^{20}$ m do centro da Via Láctea, próximo de sua periferia, e tem velocidade orbital de 220 km/s em torno do centro. Estime a massa da Galáxia.

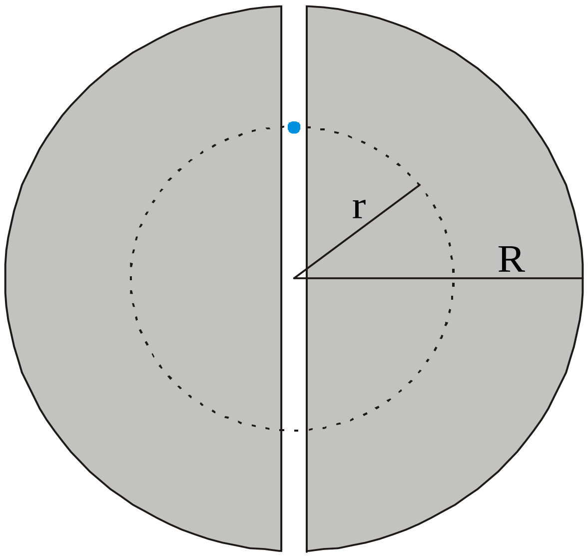
Para fins de estimativa, vamos considerar que quase toda a massa da Galáxia está no espaço interior à órbita do Sol. Como vimos, para calcular o efeito gravitacional desta massa sobre o Sol, podemos considerar toda a massa localizada no centro da Galáxia.

$$G\frac{\cancel{M_S}M_G}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{M_S}\frac{\text{v}^2}{\cancel{r}}$$

$$\Rightarrow M_G = \frac{r\ \text{v}^2}{G}$$

$$\Rightarrow M_G = \frac{2{,}5\times10^{20}\text{m}\times4{,}8\times10^{10}\text{m}^2/\text{s}^2}{6{,}7\times10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}} = 2\times10^{41}\text{kg} \ = 10^{11}M_S$$

Exemplo – Suponha que a Terra tenha densidade uniforme: (a) calcule a força exercida sobre uma partícula de massa *m* dentro de um túnel que passe por um diâmetro da Terra, como mostra a Figura abaixo; (b) Se uma pedra é solta em repouso na entrada do túnel imaginário, com que velocidade ela cruza o centro da Terra?



Força F que atua sobre a partícula de massa *m* quando ela está a uma distância *r* do centro da Terra

$$F(r) = -G\frac{mM'}{r^2} \quad (1)$$

onde *M'* é a massa contida na esfera de raio *r*.

$$M' = \rho V' = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M_T}{\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} R^3}\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} r^3 = \frac{M_T r^3}{R^3} \quad (2)$$

(2) em (1) $F(r) = -\frac{GmM_T}{R^3}r = -kr \Rightarrow U(r) = \frac{1}{2}kr^2$

(b) Usando a conservação da energia mecânica

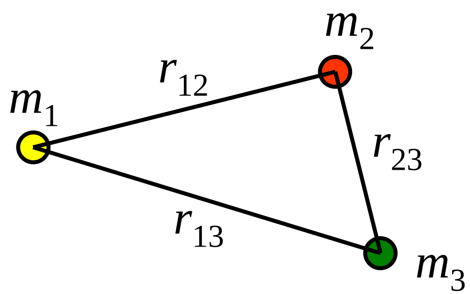
$$U(R) + K(R) = U(0) + K(0) \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\frac{G\cancel{m}M_T}{R^{\cancel{3}}}\cancel{R^2} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}V^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{G\cancel{m}M_T}{R^3}0^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\mathrm{v}^2$$

$\Rightarrow \mathrm{v}^2 = \frac{GM_T}{R} + V^2$ Partindo do repouso, V=0 $\Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = 7{,}91\ \mathrm{km/s}$

Energia potencial gravitacional de um sistema de partículas

A energia potencial gravitacional de duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas pela distância r_{12} é

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \qquad \text{sendo} \quad U(\infty) = 0$$



Ela corresponde ao trabalho da força gravitacional da partícula 1 sobre a partícula 2 para levá-la do ponto distante r_{12} de m_1 até o infinito (ponto de referência).

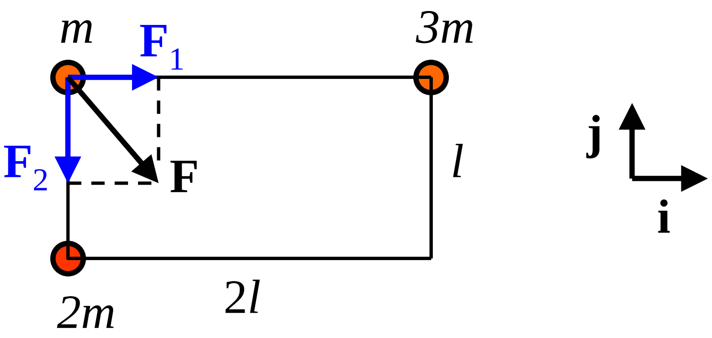
A energia potencial gravitacional de um sistema de três partículas de massas m_1, m_2, e m_3 como mostra a figura será então

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

Para um sistema de N partículas:

$$\boxed{U = -\frac{1}{2}G\sum_i \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}}$$

Exemplo – Calcule a força sobre a esfera de massa *m* na Figura abaixo e a energia potencial do sistema completo, supondo-se que a situação de energia nula é aquela em que todas as esferas estariam infinitamente afastadas uma da outra.



As forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ atuam sobre a esfera de massa *m*.

$$\mathbf{F}_1 = G\frac{3m^2}{4l^2}\mathbf{i}, \quad \mathbf{F}_2 = -G\frac{2m^2}{l^2}\mathbf{j}$$

A força resultante $\mathbf{F}$ que atua sobre a esfera de massa *m* será

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{Gm^2}{l^2}\left(\frac{3}{4}\mathbf{i} - 2\mathbf{j}\right)$$

A energia potencial gravitacional do sistema é $U = U_{12} + U_{13} + U_{23}$

$$\Rightarrow U = -G\frac{m.2m}{l} - G\frac{m.3m}{2l} - G\frac{2m.3m}{\sqrt{(2l)^2 + l^2}} = -\left(\frac{7}{2} + \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)\frac{Gm^2}{l}$$

Auto-energia gravitacional de um corpo

A auto-energia é a diferença de energia entre a situação em que o corpo está formado e a situação imaginária em que suas partes estão infinitamente dispersas.

Vamos considerar um corpo de densidade uniforme ρ e de simetria esférica e vamos compor a esfera camada por camada.

Quando o raio da esfera for r, sua massa será $m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$

Ao acrescentar uma camada infinitesimal de espessura dr e massa $dm = \rho 4\pi r^2 dr$ sua energia potencial sofrerá uma variação de

$$dU = -G\frac{mdm}{r} = -G\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{r} = -3G\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^2 r^4 dr$$

massa da esfera

$$\Rightarrow U = -3G\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5}G\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^2 R^5 = -\frac{3}{5}G\left(\frac{4\pi\rho R^3}{3}\right)^2 \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}}$$

Cálculo da energia potencial gravitacional obtida no processo de formação do Sol

Supor o Sol uma esfera uniforme de massa $M = 2 \text{ x } 10^{30}$ kg e raio $R = 7 \text{ x } 10^{8}$ m.

Sua auto-energia gravitacional será

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{5}\cdot 6{,}7\times 10^{-11}\cdot\frac{(2\times 10^{30})^2}{7\times 10^{8}}\,\mathrm{J} = -2\times 10^{41}\,\mathrm{J}$$

$U < 0$, então a energia do sistema de partículas que formou o Sol diminuiu no processo de agregação.

Estrelas se formam em nuvens moleculares gigantes compostas de gás e poeira frios e muito rarefeitos. A energia potencial inicial é portanto desprezível.

Pela conservação da energia, a perda de energia gravitacional do gás é compensada por um aumento equivalente da energia cinética.

Pelo teorema do virial, metade da energia cinética é irradiada pela estrela e a outra metade permanece em forma de calor.

Assim, o núcleo do Sol atinge temperaturas da ordem de 10^7 K, tornando possível a fusão do hidrogênio, liberando energia suficiente para manter o equilíbrio hidrostático.

Velocidade de escape

A energia potencial gravitacional de duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas pela distância r é

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

O ponto de referência para a energia potencial é $r = \infty$ ou seja, $U(\infty) = 0$

Para que um corpo de massa m escape da atração gravitacional da Terra (raio R e massa M_T), sua energia mecânica deverá ser positiva ($K > U$).

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\,mM_T\,\frac{1}{R} \geq 0$$

A velocidade mínima com que um corpo tem de ser lançado para se livrar da gravitação de um corpo celeste é denominada ***velocidade de escape.***

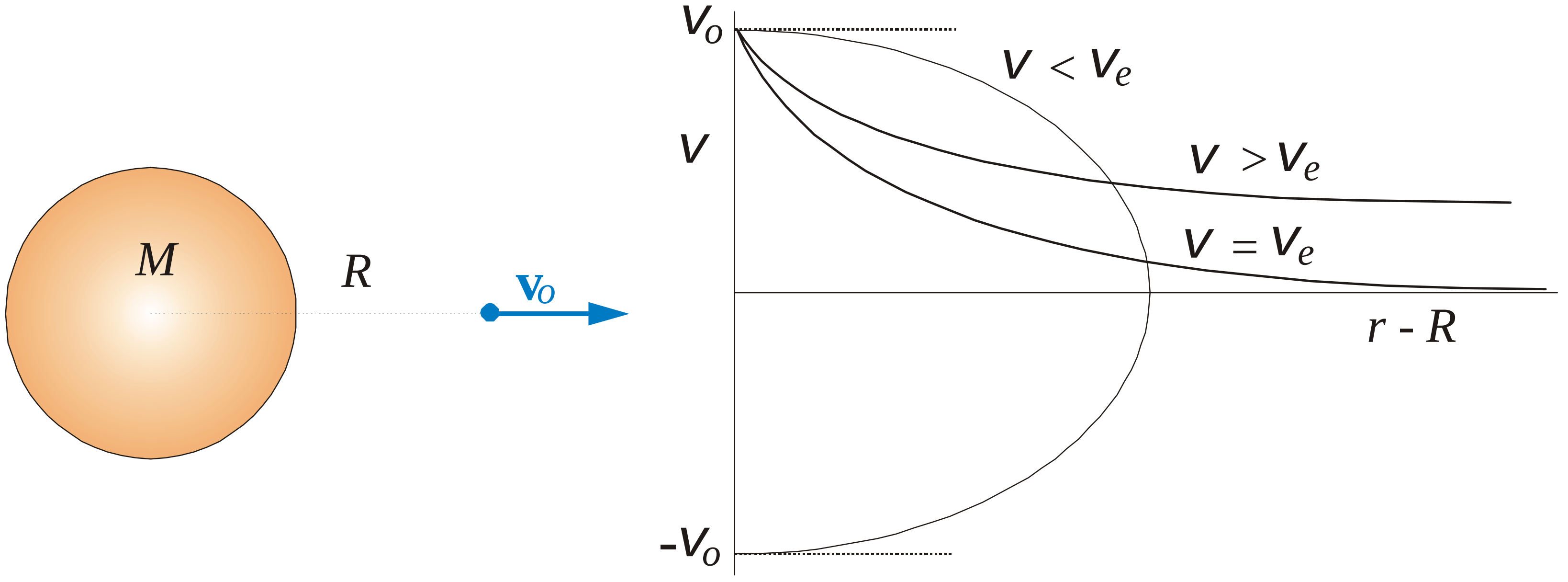
$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\,mM_T\,\frac{1}{R} = 0 \quad \Rightarrow v_e = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_e = \left(\frac{2GM}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$$

A velocidade de escape da superfície da Terra é v_e = 11,2 km/s.

A velocidade de escape da superfície do Sol é v_e = 617 km/s.

A velocidade de escape da gravitação do Sol a partir de um ponto sobre a órbita da Terra é v_e = 42 km/s.



Energia de ligação

Um corpo de massa m ligado gravitacionalmente a outro de massa M, executando uma órbita natural de raio r tem energia total dada por:

$$E = K + U = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Neste caso (corpos ligados gravitacionalmente), pode-se mostrar que esta energia é negativa, isto é, a energia cinética é menor do que o valor absoluto da potencial.

Se a órbita for circular: $G\frac{mM}{r^2} = \frac{m\mathrm{v}^2}{r} \quad \Rightarrow \mathrm{v}^2 = G\frac{M}{r}$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{GmM}{r} \quad \Rightarrow K = -\frac{1}{2}U$$

Assim a energia total do sistema será

$$E = K + U = \frac{1}{2}U < 0$$

Limite de validade da lei da gravitação de Newton

A mecânica de Newton falha quando a velocidade do corpo deixa de ser muito menor que a velocidade c da luz no vácuo. $\longrightarrow$ Relatividade restrita

A lei da gravitação de Newton, em que a força varia com o inverso do quadrado das distâncias, também falha em condições de gravidade muito intensa. $\longrightarrow$ Relatividade geral

Dois corpos se atrem gravitacionalmente. Se a distância entre eles for tal que a velocidade de escape um do outro for muito menor que a velocidade da luz, sua interação pode ser descrita pela teoria de Newton.

$$\left(\frac{2GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}} << c \quad \Rightarrow \quad \frac{2GM}{Rc^2} << 1$$

Considerando a gravidade do Sol. Em sua superfície

$$\frac{2GM}{Rc^2} = \frac{2\times 6,7\times 10^{-11}\times 2\times 10^{30}}{7\times 10^{8}\times 9\times 10^{16}} = 4,3\times 10^{-6} \quad << 1$$

A gravitação do Sol pode ser tratada com boa aproximação por Newton, com exceção da órbita de Mercúrio.

Se $\dfrac{2GM}{Rc^2} \geq 1$ teremos $v_e > c$ $\longrightarrow$ Buraco negro

Neste caso, nem mesmo a luz pode escapar do campo gravitacional.

Exemplo – Calcule o raio do horizonte de eventos de um buraco negro de M=4M_{sol}.

Horizonte de eventos → superfície de cujo interior não se pode escapar.
Em R_H, $v_e = c$

$$v_e = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow c^2 = \frac{2GM}{R_H} \Rightarrow R_H = \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow R_H = \frac{2G4M_{sol}}{c^2} = 11,8\ \text{km}$$