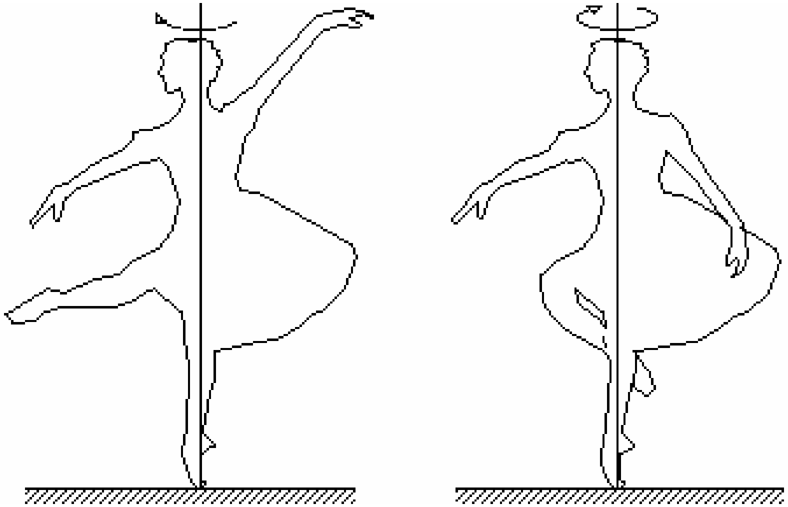
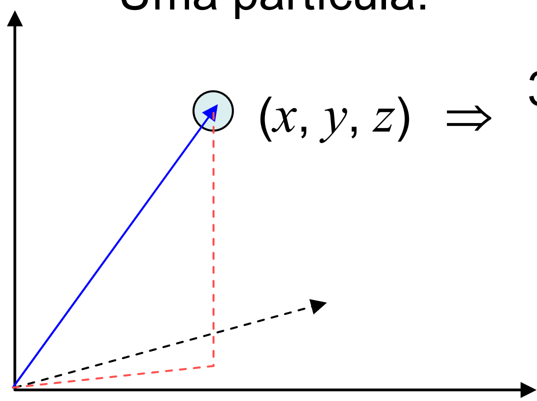
# Capítulo 10

## Rotações



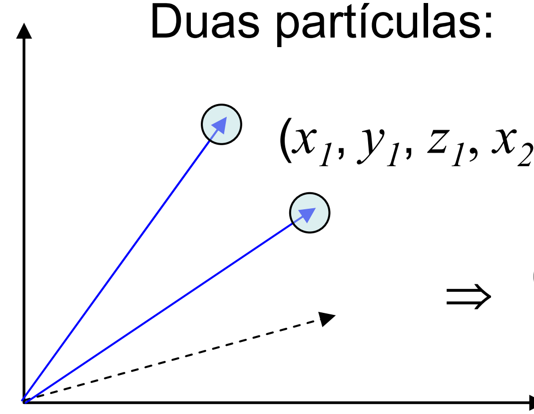
# Graus de Liberdade

Uma partícula:



$(x, y, z) \Rightarrow$ 3 graus de liberdade

Duas partículas:



$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$

$\Rightarrow$ 6 graus de liberdade

$N$ partículas $\Rightarrow 3N$ graus de liberdades

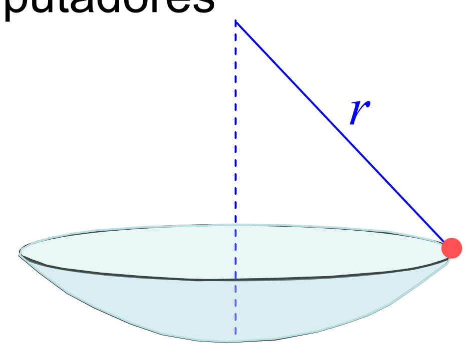
$\Downarrow$

Dependendo do valor de $N$ o estudo dos movimentos fica impraticável, mesmo com os melhores computadores

VÍNCULOS diminuem os graus de liberdades do sistema

EXEMPLO:

Distância $r$, a um ponto fixo, constante

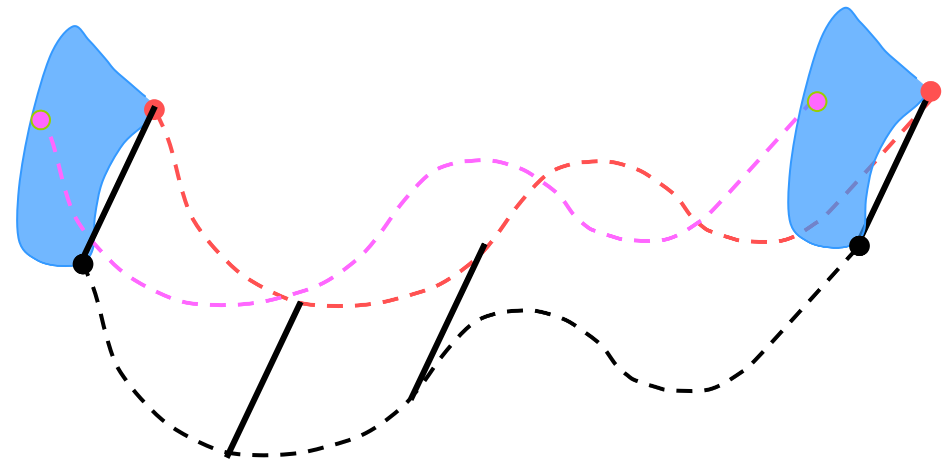



3 graus de liberdade

$\Downarrow$

2 graus de liberdade

Corpo rígido tem distância fixa entre suas partículas.



Translação de um corpo rígido:

todos os pontos se movem paralelamente

Movimento do corpo rígido $\equiv$

translação que leva um ponto A do corpo de uma posição inicial a outra final + movimentos em torno de A

$\Downarrow$ $\Downarrow$

translação - 3 graus de liberdade + rotação - 3 graus de liberdade

$\Downarrow$ $\Downarrow$

coordenadas de A

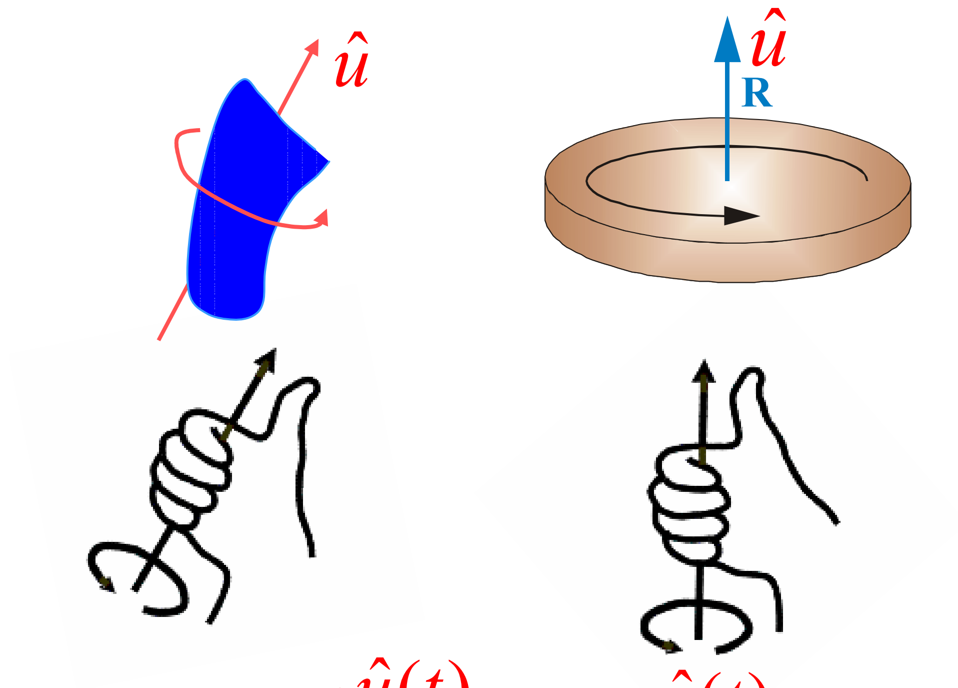
coordenadas de qualquer outro ponto em relação ao A

PORTANTO:

| Movimento de ROTAÇÃO de um corpo rígido é aquele que deixa pelo menos UM PONTO fixo |
|---|

Rotação em torno de um eixo fixo

CONVENÇÃO: regra da mão direita




Se em vez de um ponto fixo houver um eixo fixo (infinitos pontos fixos)

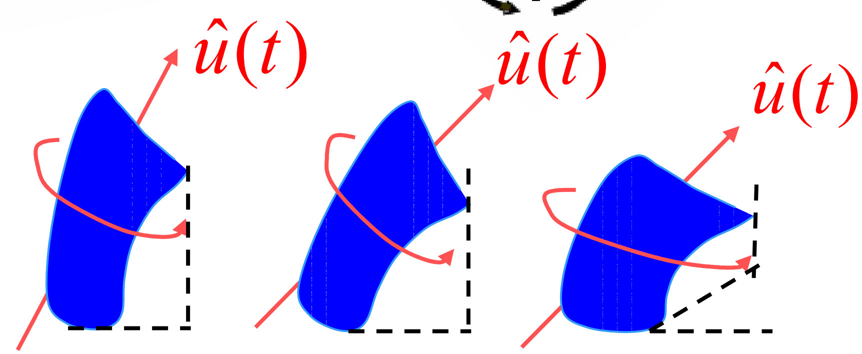
$\Downarrow$

1 grau de liberdade ≡ ângulo de rotação $\phi$ em torno do eixo

Qual o sentido positivo de rotação $\Delta\phi$ em torno do eixo

$\Delta\phi > 0$ ??

Pode-se considerar que em uma rotação com APENAS um ponto fixo sempre haverá um EIXO INSTANTÂNEO cuja direção varia com o tempo $\Rightarrow$




$\Downarrow$

Um deslocamento angular infinitesimal, é definido então por

$d\phi$ e $\hat{u}(t)$ tal que $d\vec{\phi} = \hat{u}\, d\phi$

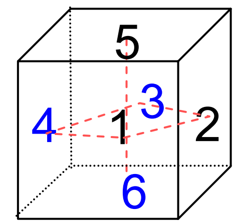
Deslocamento angular infinitesimal é definido por $d\phi$ e $\hat{u}(t)$

Deslocamento angular é vetor? Obedece álgebra vetorial?

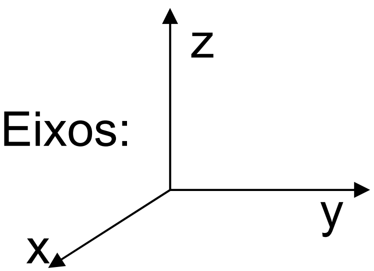
Soma pela regra do paralelogramo ? É comutativo? $\Delta\vec{\theta}_1 + \Delta\vec{\theta}_2 = \Delta\vec{\theta}_2 + \Delta\vec{\theta}_1$ ?

**Verificação**: seja um deslocamento $\Delta\theta$ em torno de um eixo $n$ dado por $R_n(\Delta\theta)$

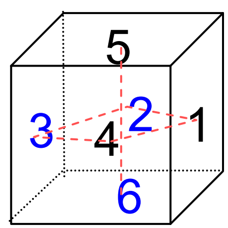
Apliquemos estes deslocamentos sobre o objeto **O** ≡



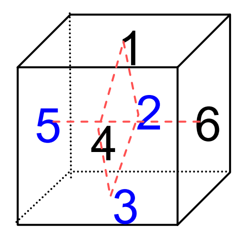

Eixos:




$R_z(\pi/2)$ **O =**

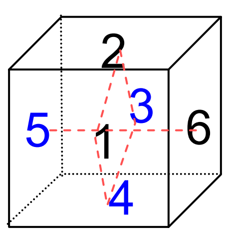



$R_x(\pi/2)\ \{\ R_z(\pi/2)\ \}$ **O =**

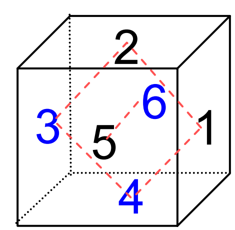



Resultados diferentes

$R_x(\pi/2)$ **O =**




$R_z(\pi/2)\ \{\ R_x(\pi/2)\ \}$ **O =**

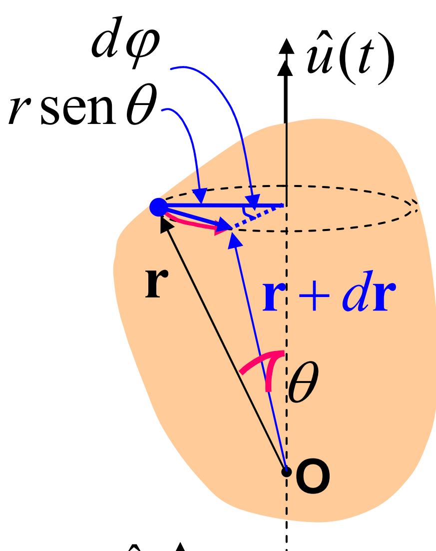



Deslocamentos angulares não obedecem a álgebra vetorial

Salvo pelos infinitésimos

Como encontrar as grandezas análogas à $\vec{\mathrm{v}}, \dfrac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$ etc., sem vetores?

Os deslocamentos INFINITESIMAIS são vetoriais !!!




Corpo rígido com rotação. Ponto fixo **O**. Eixo instantâneo $\hat{u}(t)$

Ponto na posição $\mathbf{r}$ se move até $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}$

$dr = r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\varphi$ $\Downarrow$

Sugere um produto velorial entre $\mathbf{r}$ e d$\varphi$ sendo d$\mathbf{r}$ antihorário sobre o círculo

$$d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r} = d\varphi\,\hat{u}(t) \times \mathbf{r} \quad \Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\varphi\,\hat{u}(t) \times \mathbf{r}$$

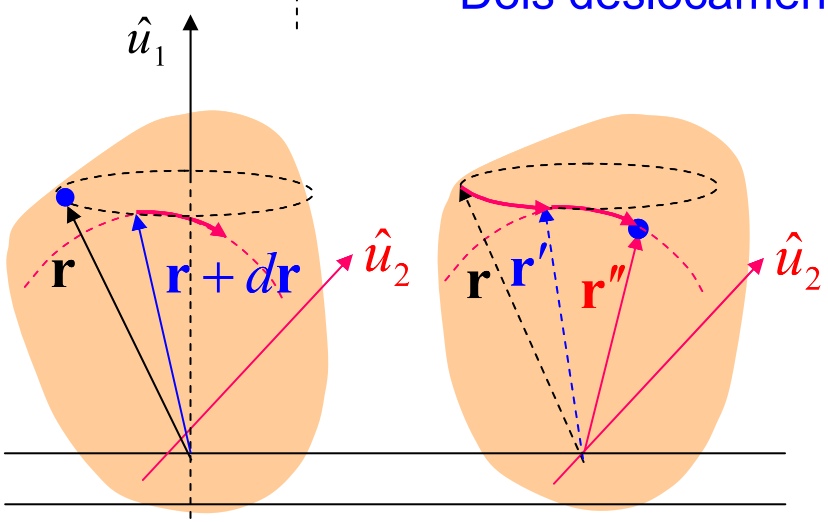
Dois deslocamentos consecutivos: $d\varphi_1, \hat{u}_1 \;\Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\varphi_1\,\hat{u}_1 \times \mathbf{r}$

$$d\varphi_2, \hat{u}_2 \;\Rightarrow \mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + d\varphi_2\,\hat{u}_2 \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r} + d\varphi_1\,\hat{u}_1 \times \mathbf{r} + d\varphi_2\,\hat{u}_2 \times \mathbf{r}$$

$$\cancel{+\, d\varphi_2\,\hat{u}_2 \times (d\varphi_1\,\hat{u}_1 \times \mathbf{r})}$$

este termo é deprezível se comparado com os outros



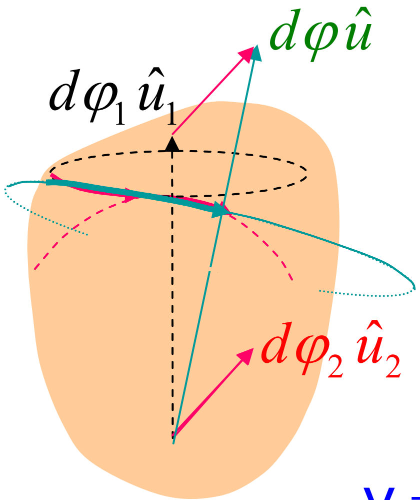

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r} + \left(d\varphi_1\,\hat{u}_1 + d\varphi_2\,\hat{u}_2\right) \times \mathbf{r}$$

**COMUTAM !!!**

Velocidade e acelaração angulares

Deslocamentos angulares INFINITESIMAIS somam-se como vetores

$$d\varphi_1\,\hat{u}_1 + d\varphi_2\,\hat{u}_2 = d\varphi\hat{u} \;\Rightarrow\; d\boldsymbol{\varphi}_1 \equiv d\varphi_1\,\hat{u}_1 \qquad d\boldsymbol{\varphi}_2 \equiv d\varphi_2\,\hat{u}_2 \qquad d\boldsymbol{\varphi} \equiv d\varphi\,\hat{u}$$




$$\frac{d\varphi_1}{dt}\hat{u}_1 + \frac{d\varphi_2}{dt}\hat{u}_2 = \frac{d\varphi}{dt}\hat{u} \;\Rightarrow\; \omega_1\hat{u}_1 + \omega_1\hat{u}_2 = \omega\hat{u}$$

Velocidades angulares somam-se como vetores

$$\boxed{d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}\times\mathbf{r} \Rightarrow \boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}}$$

$v = \omega r \operatorname{sen}\theta \Rightarrow$ Objeto planar: movimento circular $\Rightarrow v = \omega r$

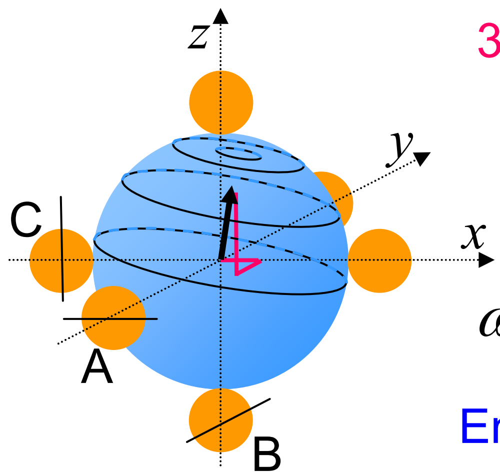
Aceleração angular:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \omega\hat{u} \;\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \equiv \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \equiv \frac{d\omega}{dt}\hat{u} + \omega\frac{d\hat{u}}{dt}$$

Se o eixo de rotação é fixo: $\Rightarrow \dfrac{d\hat{u}}{dt} = 0 \Rightarrow \alpha \equiv |\boldsymbol{\alpha}| = \dfrac{d\omega}{dt}$

EXEMPLO

Esfera de raio $R$ sustentada por 6 esferas menores de raios $R/4$




3 das esferas menores, A, B e C, possuem eixos que permitem imprimir rotações em três direções ortogonais entre si.

Não há deslizamento

$$\omega_{\mathrm{A}} = -120\,\mathrm{rad/s}; \quad \omega_{\mathrm{B}} = 160\,\mathrm{rad/s}; \quad \omega_{\mathrm{C}} = -480\,\mathrm{rad/s}$$

Encontrar o vetor velocidade angular Ω da esfera maior.

As esferas pequenas transmitem à grande velocidades tangenciais iguais às suas, mas de sinais contrários

$$\vec{\Omega}\cancel{R} = -(\vec{\omega}_{\mathrm{A}} + \vec{\omega}_{B} + \vec{\omega}_{C})\cancel{R}/4 \quad \Rightarrow \vec{\Omega} = -(\omega_{\mathrm{A}}\hat{i} + \omega_{\mathrm{B}}\hat{j} + \omega_{\mathrm{C}}\hat{k})/4$$

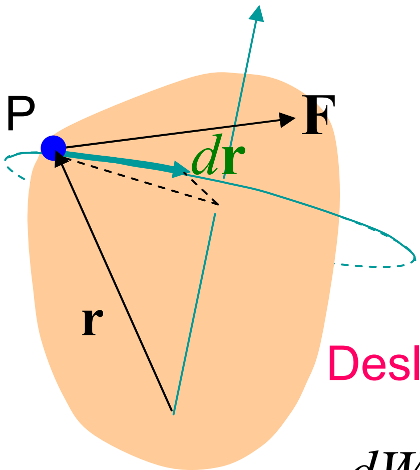
$$\vec{\Omega} = (30\hat{i} - 40\hat{j} + 120\hat{k})\mathrm{rad/s} \quad \Rightarrow \Omega = \left|\vec{\Omega}\right| = 10\sqrt{9+16+144}\,\mathrm{rad/s}{=}130\,\mathrm{rad/s}$$

DIREÇÃO (ver figura)

Ângulo entre Ω e o eixo z: $\vec{\Omega}\cdot\hat{k} = \Omega\cdot\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{120}{130} = 0{,}923 \quad \Rightarrow \quad \theta = 22{,}6^{\circ}$$

Trabalho no deslocamento angular - **definição de torque**




Força em P

P se desloca de $d\mathbf{r}$

$\Downarrow$

Trabalho de **F**: $dW = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$

Deslocamento translacional

$$dW = d\varphi \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = d\varphi \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Deslocamento rotacional

$\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ análogo de $\mathbf{F}$

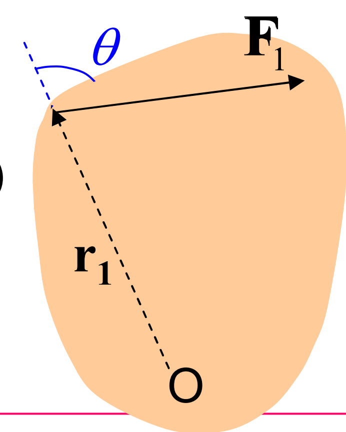
$\Downarrow$

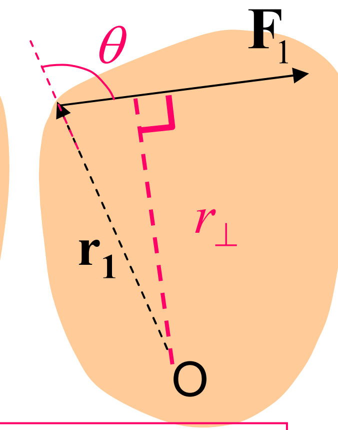
$\boxed{\text{TORQUE} \equiv \tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$

POTÊNCIA de **F**: $P \equiv \dfrac{dW}{dt} = \dfrac{d\varphi \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{F}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau}$

| TRANSLAÇÃO | ROTAÇÃO |
|---|---|
| $d\mathbf{r}$ | $d\varphi$<br>$d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r}$ |
| $\mathbf{v}$ | $\omega$<br>$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ |
| $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt$ | $\alpha \equiv d\,\omega\,/dt$ |
| $\mathbf{F}$ | $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ |
| $\mathbf{p}$ | ? |
| 2a.Lei Newton<br>$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ | ? |
| 2a.Lei Newton<br>$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ | ? |
| $m$ | ? |
| $K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$ | ? |

TORQUE ≡ $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$




MÓDULO: $\tau = rF\,\mathrm{sen}\,\theta \;= r\,(F\,\mathrm{sen}\,\theta) \;= F\,(r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$rF_\perp \qquad\qquad r_\perp F$$

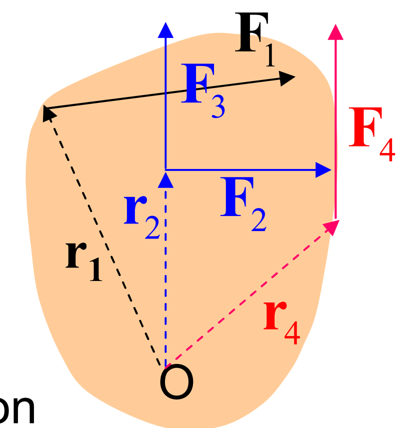
BRAÇO DE ALAVANCA ≡ Distância da origem O à reta suporte da força

SINAL do torque: ⊗ entrando no plano de escrita

⇓

o torque atua para girar o corpo no sentido horário

TORQUE RESULTANTE: $\mathbf{T} = \underset{\otimes}{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1} + \underset{\otimes}{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2} + \underset{\boxed{\text{nulo}}}{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_3} + \underset{\odot}{\mathbf{r}_4 \times \mathbf{F}_4}$




Só somam-se os torques de FORÇAS EXTERNAS? E as internas?

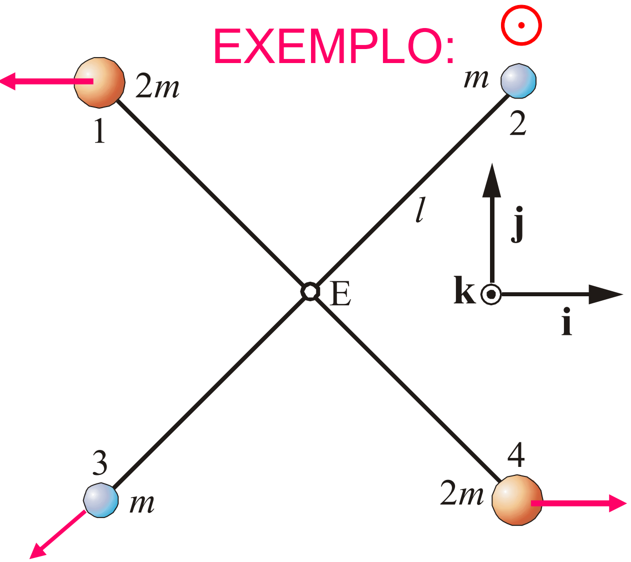
Forças internas aparecem aos pares, obedecendo a 3a. Lei de Newton

⇓

Soma dos torques de todas as forças internas = ZERO

UM PAR: $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} \;= \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right) \times \mathbf{F}_{ij} = \overbrace{\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij}}^{\text{paralelos}} \;= 0$

EXEMPLO:




Sobre cada esfera $i$ atua uma força $\mathbf{F}_i$ dada por:

$$\mathbf{F}_1 = -F\,\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_2 = F'\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_3 = F''(-\mathbf{i}-\mathbf{j}) \qquad \mathbf{F}_4 = F\,\mathbf{i}$$

a) Calcule os torques de cada força e o torque resultante sobre o corpo, com relação ao seu ponto central E.

1) $\tau_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = l\dfrac{(\mathbf{j}-\mathbf{i})}{\sqrt{2}} \times (-F\,\mathbf{i}) = -\dfrac{lF}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j}\times\mathbf{i} = \dfrac{lF}{\sqrt{2}}\,\mathbf{k}$

2) $\tau_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = l\dfrac{(\mathbf{i}+\mathbf{j})}{\sqrt{2}} \times F'\,\mathbf{k} = lF'\dfrac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$

3) $\tau_3 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 = 0$

4) $\tau_4 = \mathbf{r}_4 \times \mathbf{F}_4 = l\dfrac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}} \times F\,\mathbf{i} = \dfrac{lF}{\sqrt{2}}\,\mathbf{k}$

Torque resultante $\mathbf{T}_E = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = \sqrt{2}lF\,\mathbf{k} + lF'\dfrac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$

b) Se houver uma velocidade angular $\omega$, no sentido anti-horário, em torno de um eixo que passa por E, $\perp$ ao plano da figura, qual é a potência realizada sobre o corpo e quais são as forças que contribuem para esta potência.

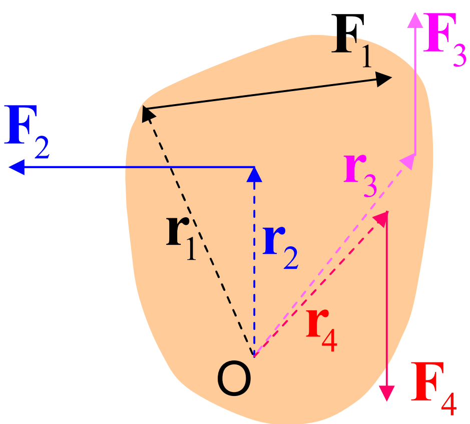
Potência = produto escalar entre torque e velocidade angular $\quad \boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k}$

$$P = \mathbf{T}_E \cdot \omega\,\mathbf{k} = \left(\sqrt{2}lF\,\mathbf{k} + lF'\frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}\right)\cdot \omega\,\mathbf{k} = \sqrt{2}lF\omega$$

Para este resultado só contribuíram as forças que atuam nas esferas 1 e 4, cujos torques possuem uma componente paralela a ω.

## Dois teoremas muito úteis:

1) Se a soma total das forças externas que atuam sobre um corpo é nula, o torque resultante não depende da origem em relação à qual é calculado.

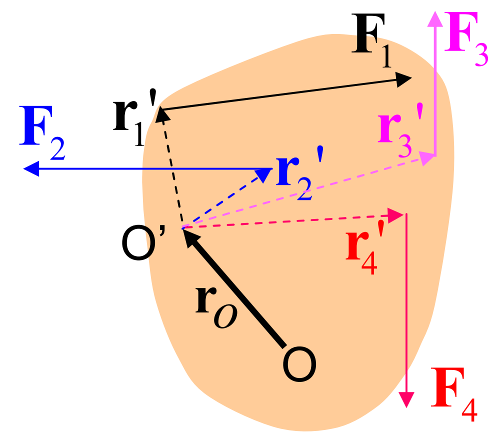



$$\mathbf{T} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,ext}$$

$$\sum_i \mathbf{F}_{i,ext} = 0$$

Mudando a origem para O':

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O$$



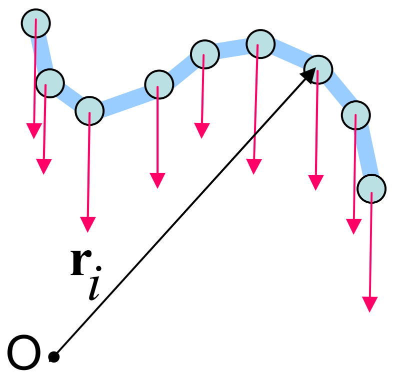

$$\mathbf{T}' = \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_{i,ext} = \sum_i \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O\right) \times \mathbf{F}_{i,ext}$$

$$= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,ext} - \sum_i \mathbf{r}_O \times \mathbf{F}_{i,ext}$$

$$= \mathbf{T} - \mathbf{r}_O \times \cancel{\sum_i \mathbf{F}_{i,ext}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{T}' = \mathbf{T}}$$

Dois teoremas muito úteis:

2) O torque total sobre um corpo de massa $M$ realizado pelo seu peso pode ser calculado supondo-se que todo o peso é aplicado no centro de massa do corpo.




$$\mathbf{T}_g = \sum_i \tau_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}_i \quad = \left( \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i m_i \right) \times M\mathbf{g}$$

$$\boxed{\mathbf{T}_g = \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{g}}$$

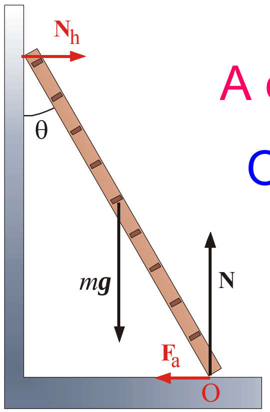
Como se todo o peso estivesse no centro de massa.

Válido também para um corpo contínuo.

Basta usar a integral de $dm$ no lugar do somatório.

EXEMPLO: Escada de comprimento $L$.

Forças : peso, normal **N**, normal $\mathbf{N}_h$ e força de atrito $\mathbf{F}_a$. Não há atrito entre a escada e a parede.




A escada não está em movimento resultante das forças =0. Torque = ?

O peso da escada será considerado no seu centro de massa.

Resultante das forças =0 $\Rightarrow$ $N = mg \;, \quad N_h = F_a$

Em relação ao ponto O: $T = mg\frac{L}{2}sen\theta - F_a L\cos\theta$

## Definição de Momento angular

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad \tau=\frac{d?}{dt}$$

$$\tau=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})-\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})-\cancel{\mathbf{v}\times m\mathbf{v}}$$

Momento linear

$$\tau=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$$

Momento angular

$$\boxed{\ell\equiv\mathbf{r}\times\mathbf{p}}$$

2a.Lei de Newton para rotações

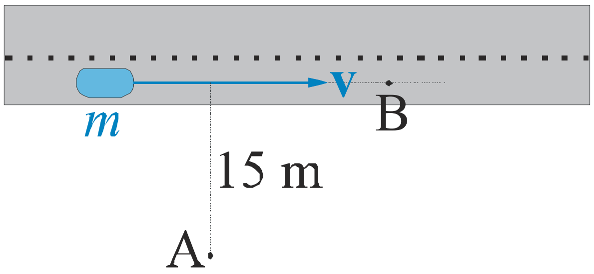
$$\boxed{\tau=\frac{d\ell}{dt}}$$

Torque de várias forças e momento angular de várias partículas:

$$\sum_i\tau_i=\frac{d}{dt}\sum_i\ell_i \Rightarrow \boxed{\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}} \qquad \mathbf{T}\equiv\sum_i\tau_i \qquad \mathbf{L}\equiv\sum_i\ell_i$$

| TRANSLAÇÃO | ROTAÇÃO |
|---|---|
| $d\mathbf{r}$ | $d\varphi$ <br> $d\mathbf{r}=d\varphi\times\mathbf{r}$ |
| $\mathbf{v}$ | $\omega$ <br> $\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$ |
| $\mathbf{a}\equiv d\mathbf{v}/dt$ | $\alpha\equiv d\,\omega\,/dt$ |
| $\mathbf{F}$ | $\tau\equiv\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ |
| $\mathbf{p}$ | $\ell\equiv\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ |
| 2a.Lei Newton <br> $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ | $\tau=\frac{d\ell}{dt}$ |
| 2a.Lei Newton <br> $\mathbf{F}=m\,\mathbf{a}$ | ? |
| $m$ | ? |
| $K=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$ | ? |

EXEMPLO 1:




Carro: massa = 1000 kg, velocidade = 30 m/s.

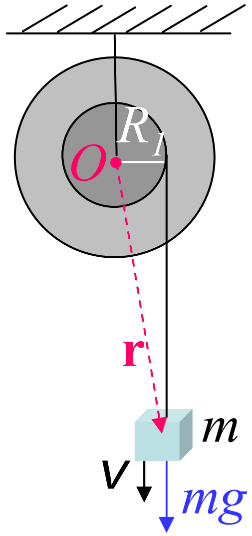
$\ell$ em relação aos pontos A e B = ?

Se carro ≡ partícula :

$$\ell_A = 15\text{m} \times 1000 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}} \times 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4{,}5 \times 10^5 \text{J} \cdot \text{s} \qquad \ell_B = 0$$

Um corpo em movimento retilíneo tem momento angular em relação a um ponto fora da trajetória.

EXEMPLO 2: Fio se desenrola (tensão nula) e roldana sem massa e sem atrito




$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g} \qquad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

Aceleração = $g$ $\qquad T = R_1 mg \qquad L = R_1 m\text{v}$

2ª.Lei: $T = \dfrac{dL}{dt} \Rightarrow R_1 mg = \dfrac{d}{dt}(R_1 m\text{v}) \Rightarrow g = \dfrac{d\text{v}}{dt} \equiv a$

**Eixo fixo**

ATÉ AGORA CONSIDEROU-SE ROTAÇÃO COM UM PONTO FIXO
(3 graus de liberdade)

Não havia um eixo fixo

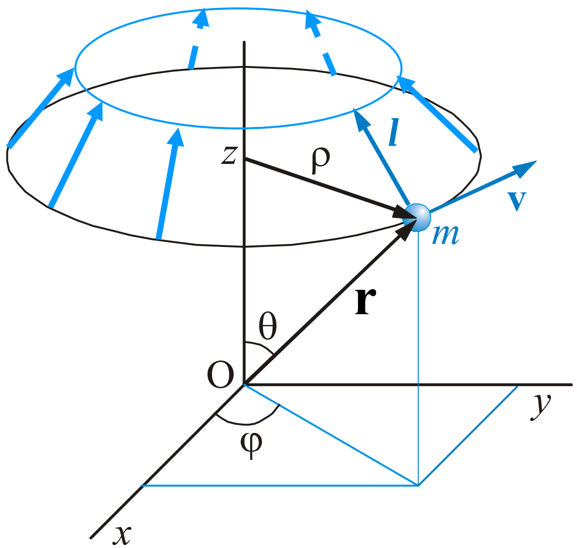
AGORA CONSIDERAR-SE-Á ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO
(1 grau de liberdade)

| TRANSLAÇÃO | ROTAÇÃO |
|---|---|
| $d\mathbf{r}$ | $d\varphi$<br>$d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r}$ |
| $\mathbf{v}$ | $\omega$<br>$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ |
| $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt$ | $\alpha \equiv d\,\omega\,/dt$ |
| $\mathbf{F}$ | $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ |
| $\mathbf{p}$ | $\ell \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ |
| 2a.Lei Newton<br>$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ | $\tau = \frac{d\ell}{dt}$ |
| 2a.Lei Newton<br>$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ | ? |
| $m$ | ? |
| $K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \mathrm{v}_i^2$ | ? |

Senão o análogo de massa $m$ terá que ser uma matriz 3x3

## Eixo fixo

Momento angular de **uma** partícula em movimento circular uniforme

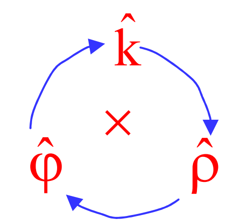



$$\mathbf{r} = z\hat{\mathrm{k}} + \boldsymbol{\rho} \qquad \boldsymbol{\rho} \equiv \rho\underbrace{(\mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\phi)}_{\hat{\rho}\ \equiv\ \text{radial}}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \omega\rho\underbrace{(-\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\omega t + \mathbf{j}\cos\omega t)}_{\hat{\varphi}\ \equiv\ \text{tangencial}}$$

$$v_z = 0$$

$(\hat{\mathrm{k}}, \hat{\rho}, \hat{\varphi})$ ≡ tríade ordenada pela regra da mão direita: $\hat{\mathrm{k}} \times \hat{\rho} = \hat{\varphi}$




Momento angular: $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = (z\hat{\mathrm{k}} + \boldsymbol{\rho}) \times m\mathbf{v} \;= z\hat{\mathrm{k}} \times m\omega\rho\,\hat{\varphi} + \rho\,\hat{\rho} \times m\omega\rho\,\hat{\varphi}$

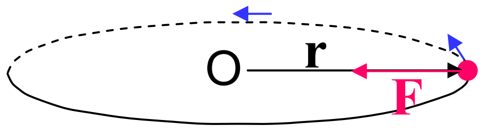
$$\boxed{\boldsymbol{\ell} = -mz\omega\rho\,\hat{\rho}(t) + m\omega\rho^2\,\hat{\mathrm{k}}}$$

Varia no tempo

Constante no tempo

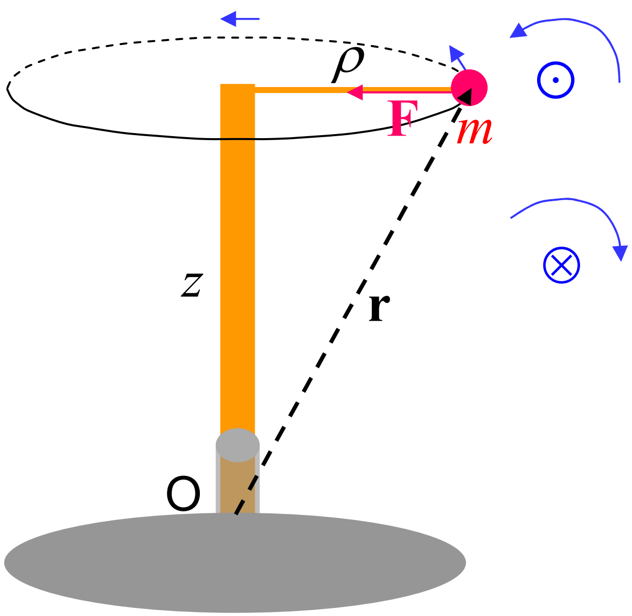
**Eixo fixo** Torque da força centrípeta – eixo balanceado

Como




$$\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

Torque da força Terra-Lua em relação à Terra = 0

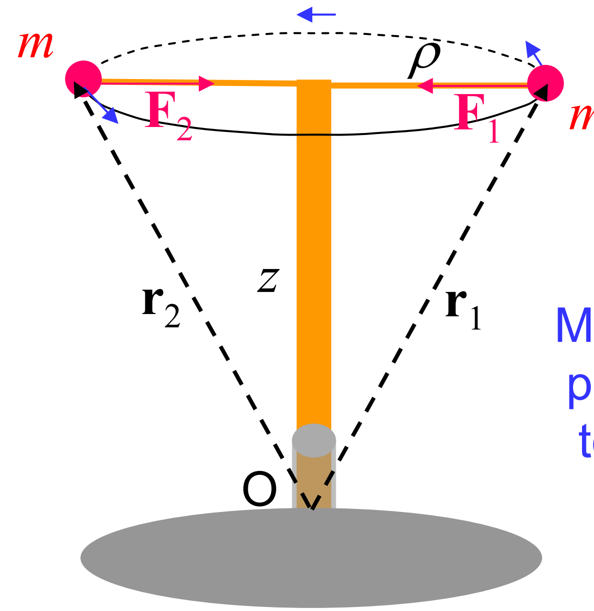



Torque sobre a partícula

Torque da partícula sobre as barras e a base. Sentido de curvar a base para fora.

$\Downarrow$

Rotação em eixo não balanceado




Movimento da partícula não tenta curvar as barras.

$\Downarrow$

Rotação em eixo balanceado

$$\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = -\hat{\varphi} z m \omega^2 \rho$$

$$\mathrm{T} \equiv \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = 0$$

$$\ell = -mz\omega\rho\,\hat{\rho}(t) + m\omega\rho^2\,\hat{\mathrm{k}}$$

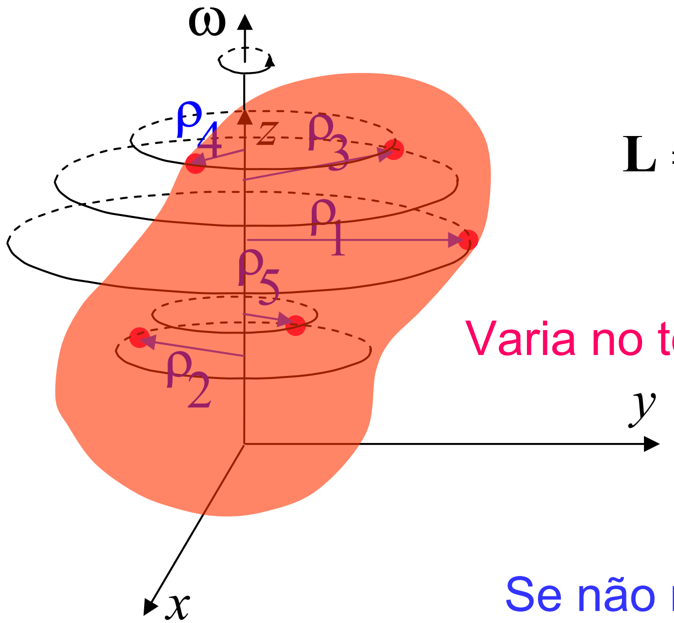
$$\Rightarrow \tau = \frac{d\ell}{dt} = -mz\omega\rho \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt}$$

$$\mathbf{L} = \ell_1 + \ell_2 = 2m\omega\rho^2\,\hat{\mathrm{k}}$$

$$\mathbf{T} \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

**Eixo fixo**

# Momento angular de **um corpo rígido** – Momento de inércia




$$\ell_i = -m_i z_i \omega\, \mathrm{\rho}_i(t) + m_i \omega \rho_i^2\, \hat{\mathrm{k}}$$

$$\mathbf{L} = \sum_i \ell_i = -\omega \hat{\mathrm{\rho}}(t) \sum_i m_i z_i\, \rho_i + \omega \hat{\mathrm{k}} \sum_i m_i \rho_i^2$$

Varia no tempo

Constante no tempo

Se nulo $\Rightarrow$ eixo balanceado.
Se não nulo o eixo será forçado radialmente para fora.

Se o eixo suporta os torques no plano $\mathrm{xy}$ $\Rightarrow$ a rotação se dá em um eixo fixo

$\Downarrow$

Só interessa a componente $L_z$

$$L_z = \left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)\omega \Rightarrow \boxed{L_z = I_z \omega}$$

Compare com $p_z = m \mathrm{v}_z$ $\Rightarrow$ $I_z$ análogo a $m$

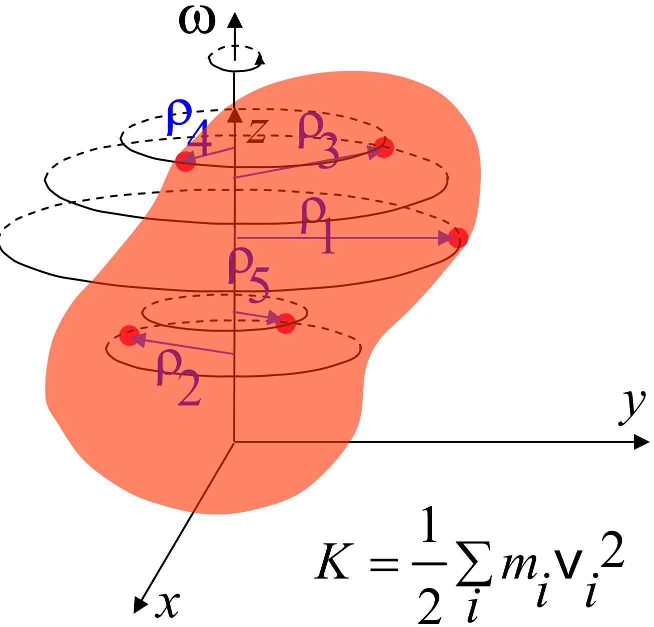
$$I_z \equiv \sum_i m_i \rho_i^2$$

$I_z \equiv$ Momento de Inércia

Derivando em $t$: $\boxed{T_z = I_z \alpha}$ $\Rightarrow$ Análogo a $\mathrm{F}=ma$

**Eixo fixo** $T_z = I_z \alpha$ $\quad I_z \equiv \sum_i m_i \rho_i^2$

**Energia Cinética**




$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \mathrm{v}_i^2 \qquad \mathrm{v}_i = \omega \rho_i$$

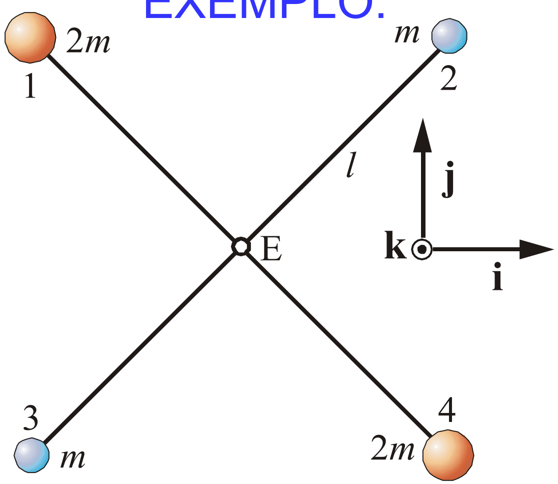
$$K = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)\omega^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$$

| TRANSLAÇÃO | ROTAÇÃO |
|---|---|
| $d\mathbf{r}$ | $d\varphi$<br>$d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r}$ |
| $\mathbf{v}$ | $\omega$<br>$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ |
| $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt$ | $\alpha \equiv d\,\omega\,/dt$ |
| $\mathbf{F}$ | $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ |
| $\mathbf{p}$ | $\ell \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ |
| 2a.Lei Newton<br>$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ | $\tau = \frac{d\ell}{dt}$ |
| 2a.Lei Newton<br>$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ | $T_z = I_z \alpha$ |
| $m$ | $I_z \equiv \sum_i m_i \rho_i^2$ |
| $K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \mathrm{v}_i^2$ | $K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ |

EXEMPLO:




Momento de inércia do corpo mostrado na figura, em relação ao eixo perpendicular ao plano de escrita, no ponto E. Os aros que vão do eixo às esferas têm massa desprezível, e o raio das esferas é muito menor que $l$.

Cada esfera pode ser tratada como uma partícula cuja distância ao eixo é igual a $l$.

$$I_E = m_1\rho_1^2 + m_2\rho_2^2 + m_3\rho_3^2 + m_4\rho_4^2 \Rightarrow I_E = (2m+m+m+2m)l^2 = 6ml^2$$

Se torque aplicado:

$$\mathbf{T}_E = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = \sqrt{2}lF\,\mathbf{k} + lF'\frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

Determine a aceleração angular em torno do eixo.

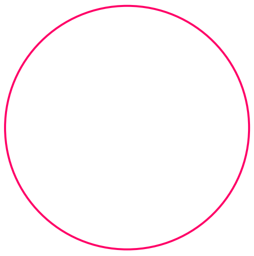
Deve-se usar a componente do torque na direção z.

$$T_z = I_z\alpha \quad \Rightarrow \alpha = \frac{T_z}{I_z} = \frac{\sqrt{2}lF}{6ml^2} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}F}{6ml}$$

Encontre a velocidade e o deslocamento angulares em função do tempo. Suponha que $\omega(0) = 0$.

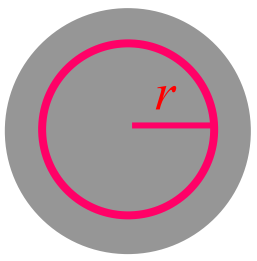
$$\omega = \int_0^t \alpha(t')\,dt' = \frac{\sqrt{2}F}{6ml}t \qquad \Delta\theta = \int_0^t \omega(t')\,dt' = \frac{\sqrt{2}F}{12ml}t^2$$

EXEMPLO: $I$ de um anel de raio $R$ e massa $M$ , em relação ao eixo que passa pela seu centro, perpendicular ao seu plano.



$$I = \int R^2 dm \quad = R^2 \int dm = MR^2$$

EXEMPLO: $I$ de um disco de raio $R$ e massa $M$ , em relação ao eixo que passa pela seu centro, perpendicular ao seu plano.




$$I = \int r^2 dm \qquad dm = \frac{M}{\pi R^2} dA \quad = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr$$

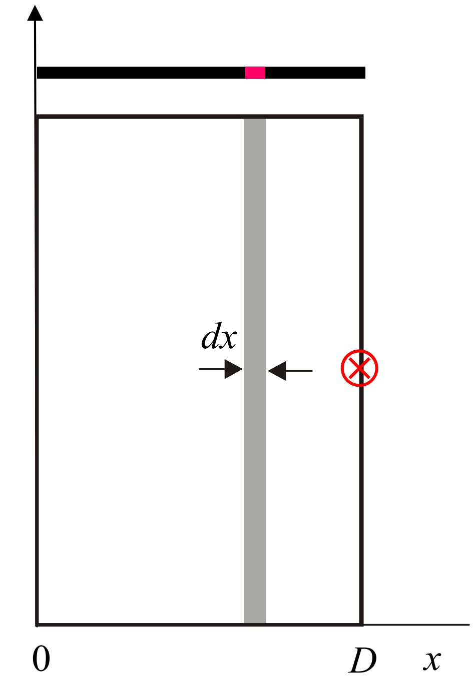
$$I = \int r^2 dm \quad = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr \quad = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}$$

EXEMPLO: $I$ de um disco de raio $R$ e massa $M$ , em relação ao eixo perpendicular ao seu plano, que passa tangente à sua borda.

Teorema dos eixos paralelos: $I = I_{cm} + Md^2 \quad \Rightarrow I = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$

$I$ de uma porta de largura $D$ e massa $M$ , em relação ao eixo que passa pelas dobradiças.

OU $I$ de uma barra de comprimento $D$ e massa $M$, em relação ao eixo que passa por uma de suas extremidades.




$$I = \int x^2\, dm$$

Porta: $dm = \frac{M}{Dh} dA = \frac{M}{Dh} h dx = \frac{M}{D} dx$

Barra: $dm = \frac{M}{D} dx$

$$I = \frac{M}{D} \int_0^D x^2 dx = \frac{1}{3} MD^2$$

EXEMPLO: Porta de largura $D = 80\text{cm}$ e massa $M = 15\text{Kg}$.

Força $F = 20\text{N}$, perpendicular à porta, na extremidade livre. Aceleração angular $\alpha$ = ?

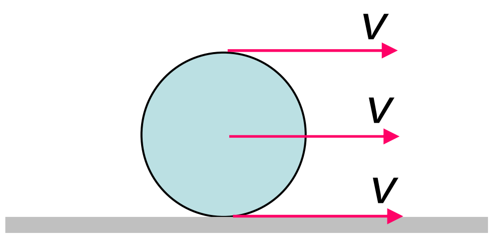
$$I = \frac{1}{3} MD^2 = \frac{15\text{Kg} \cdot (0,8\text{m})^2}{3} = 3,2\text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\tau = F \cdot D = 20\text{N} \cdot 0,8\text{m} = 16\text{Nm}$$

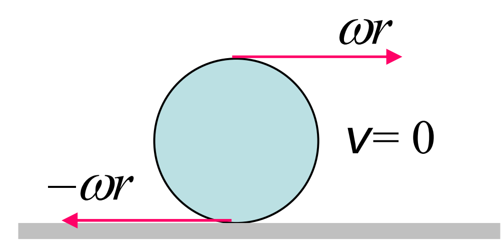
$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow 16\text{Nm} = 3,2\text{Kg} \cdot \text{m}^2\, \alpha \;\Rightarrow \alpha = \frac{16\text{Nm}}{3,2\text{Kg} \cdot \text{m}^2} = 5,0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^{-2}}$$

## Exemplo: Rolamento e Deslizamento de corpos com simetria cilíndrica ou esférica

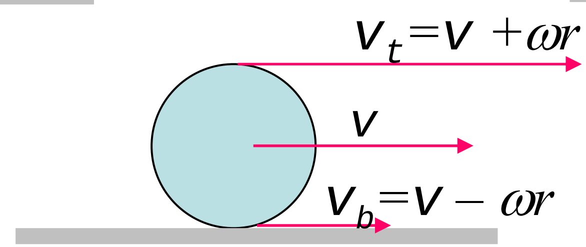
DESLIZAMENTO TRANSLACIONAL $\oplus$ DESLIZAMENTO ROTACIONAL

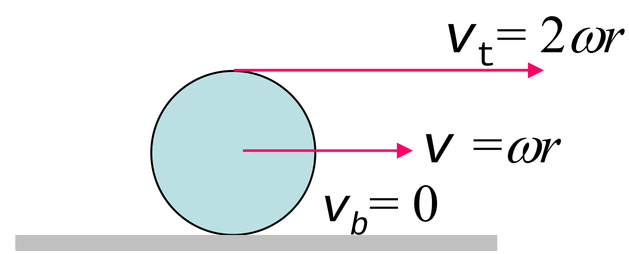



$\oplus$




MOVIMENTO GERAL




$v = \omega r \Rightarrow$ ROLAMENTO

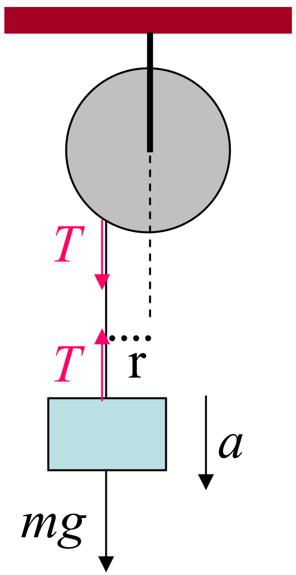
Não há deslizamento. Atrito estático ≠ 0 $\Rightarrow v_b = 0$

Pode-se considerar um eixo, que se move, passando pelo ponto de contato com o chão.

ROLAMENTO COM DESLIZAMENTO TRANSLACIONAL $\Rightarrow v > \omega r$

ROLAMENTO COM DESLIZAMENTO ROTACIONAL $\Rightarrow v < \omega r$

EXEMPLO: Corpo de massa $m$ pendurado em roldana de raio $r$ e momento de inércia $I$ por corda sem massa. A roldana gira sem deslizar.




ACELERAÇÃO = ?

*Método 1: 2a.Lei de Newton:*

Bloco (translação)

$$mg - T = ma$$

Roldana (rotação)

$$T \cdot r = I\alpha$$

Mas $\alpha = \dfrac{a}{r} \Rightarrow mg - \dfrac{Ia}{r^2} = ma$

$$\Rightarrow a = \frac{mg}{m + I/r^2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{g}{1 + I/mr^2}}$$

*Método 2: Conservação de Energia:*

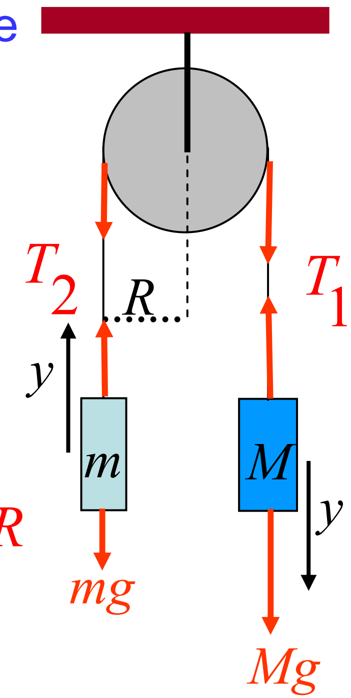
Quando o deslocamento do corpo tiver sido $y$ (origem no ponto inicial) :

$$E_i = 0, E_f = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mgy \quad \Rightarrow \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgy$$

Derivando em relação ao tempo:

$$m\mathrm{v}\frac{d\mathrm{v}}{dt} + I\omega\frac{d\omega}{dt} = mg\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow m\cancel{\mathrm{v}}a + I\frac{\cancel{\mathrm{v}}}{r}\frac{a}{r} = mg\cancel{\mathrm{v}} \quad \Rightarrow \left(1 + \frac{I}{mr2}\right)a = g$$

EXEMPLO: Dois blocos suspensos por uma roldana com momento de inércia $I$. O valor de $M$ é maior do que o de $m$, e o atrito do fio com a roldana é suficiente para que ela gire sem haver deslizamento do fio.




Calcule a aceleração angular da roldana.

*Conservação de Energia:*

Após os corpos se deslocarem de $y$, em sentidos opostos:

$$\Delta U = mgy - Mgy \quad \text{e} \quad \Delta K = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad \text{onde} \quad v = \omega R$$

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \frac{(m+M)R^2\omega^2 + I\omega^2}{2} = (M-m)gy$$

Após derivar em relação ao tempo obtém-se: $\alpha = \dfrac{(M-m)gR}{(M+m)R^2 + I}$

*Leis de Newton:* *Veja as forças em cada corpo*

*TORQUE:* $(T_1 - T_2)R = I\alpha$

$$\oplus \left. \begin{array}{l} Mg - T_1 = M\alpha R \\ T_2 - mg = m\alpha R \end{array} \right\}$$

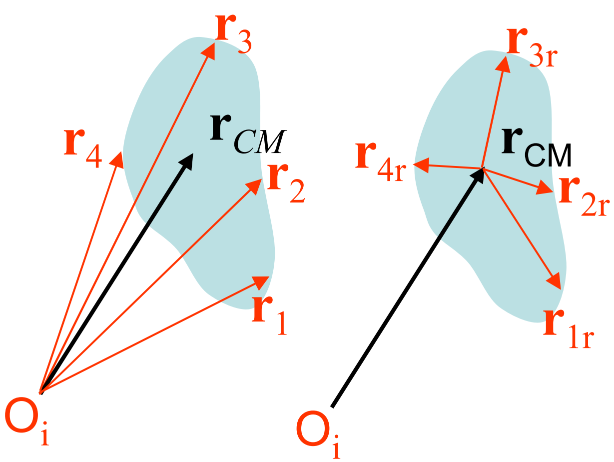
$$(M-m)g\,R = \left(T_1 - T_2\right)R + (M+m)\alpha R^2$$

$$(M-m)gR = \left[(M+m)R^2 + I\right]\alpha$$

## Movimentos Externo e Interno de um corpo

Movimento de um corpo ≡ TRANSLAÇÃO (de um ponto O) + ROTAÇÃO (em torno dele)

Então se O ≡ *c.m.* :      TRANSLAÇÃO ≡ Mov. Externo e ROTAÇÃO ≡ Mov. Interno




$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}_{ir} \qquad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_{ir}$$

$$v_i^2 = v_{cm}^2 + 2\ \mathbf{v}_{cm}\cdot\mathbf{v}_{ir} + v_{ir}^2$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$\mathbf{P}_{total} = M\mathbf{v}_{CM} = 0$, no ref. do CM

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right) v_{cm}^2 + \mathbf{v}_{cm}\cdot\cancel{\sum_i m_i \mathbf{v}_{ir}} + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_{ir}^2$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_{ir}^2 \quad \text{onde} \quad K = K_{\text{translação}} + K_{\text{interno}}$$

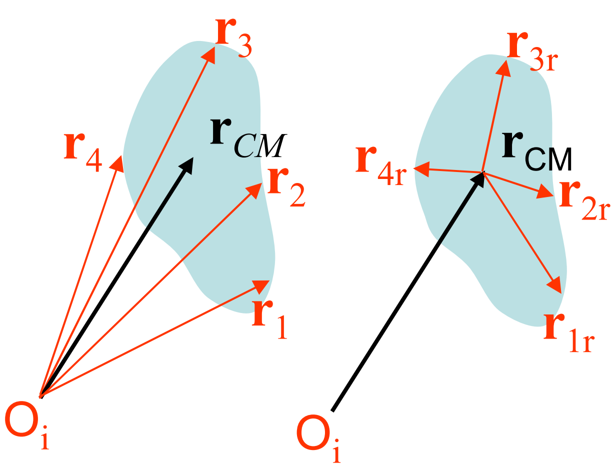
Se Mov. Interno ≡ ROTAÇÃO em torno de um eixo:

$$v_{ir} = \omega\rho_i \Rightarrow K_{\text{interno}} = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

**Movimentos Externo e Interno de um corpo**

Movimento de um corpo ≡ TRANSLAÇÃO (de um ponto O) + ROTAÇÃO (em torno dele)

Então se O ≡ *c.m.* : TRANSLAÇÃO ≡ Mov. Externo e ROTAÇÃO ≡ Mov. Interno




$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}_{ir} \qquad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_{ir}$$

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_{cm} + \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_{ir}$$

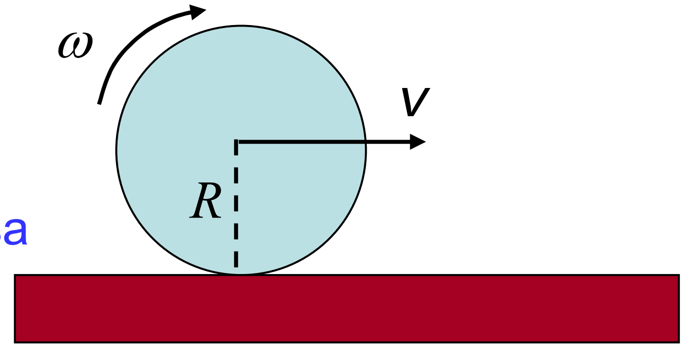
$$\Rightarrow \mathbf{L} = \underbrace{(\sum_i m_i \mathbf{r}_i)}_{M\mathbf{r}_{cm}} \times \mathbf{v}_{cm} + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{ir}$$

$$\mathbf{L} = M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{ir}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{trans} + \mathbf{L}_{int} = M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} + \sum_i m_i \mathbf{r}_{ir} \times \mathbf{v}_{ir}$$

E se o Mov. Interno é Rotação em torno de um eixo: $v_{ir} = \omega\rho_i \Rightarrow L = L_{trans} + I\omega$

EXEMPLO: Mostre que os movimentos interno e externo de um corpo rolando sobre um superfície, sem deslizamento, podem ser considerados como apenas uma rotação em torno de um eixo passando pelo ponto de contato entre o corpo e a superfície.




$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_o\omega^2 \qquad L = RMv + I_o\omega$$

$I_o$ em relação a um eixo passando pelo centro de massa

sem deslizamento $\Rightarrow v = \omega R$

$$K = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_o\omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_o + MR^2\right)\omega^2$$

$$L = MR^2\omega + I_o\omega = \left(I_o + MR^2\right)\omega$$

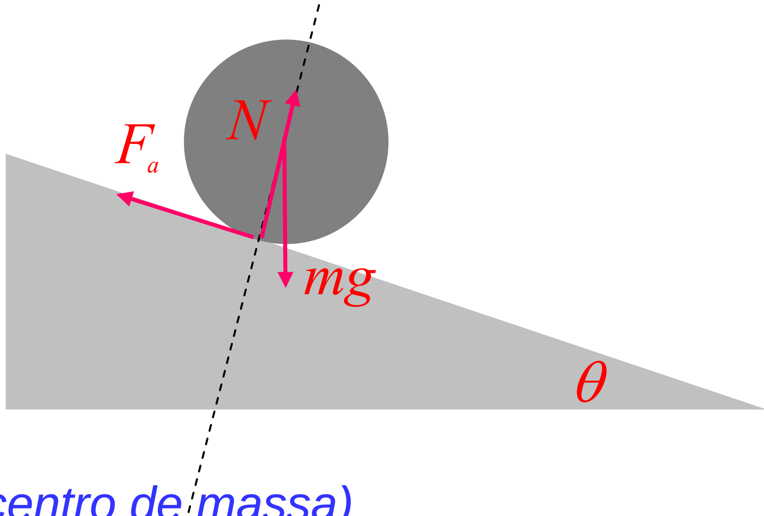
Mas $I_o + MR^2 \equiv I$

é o momento de inércia em relação a um eixo passando pelo ponto de contato com a superfície.

$$\boxed{K = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

$$\boxed{L = I\omega}$$

EXEMPLO: Corpo de massa $m$, raio $r$ e momento de inércia $I_o$, com relação a um eixo passando pelo centro de massa (C.M.), desce sem deslizar um plano inclinado de ângulo $\theta$.




A) ACELERAÇÃO DE TRANSLAÇÃO DO C.M. ?

*Método 1: 2a.Lei de Newton (eixo passando pelo centro de massa)*

Veja as forças que atuam no corpo

Torque : $\tau = F_a r \Rightarrow F_a r = I_o \alpha$

$\Rightarrow F_a r^2 = I_o a$

Transl. do CM $\quad mg \operatorname{sen}\theta - F_a = ma$

$$mgr^2 \operatorname{sen}\theta = I_o a + mar^2$$

$$a = \frac{mr^2 g \operatorname{sen}\theta}{I_o + mr^2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + I_o/mr^2}}$$

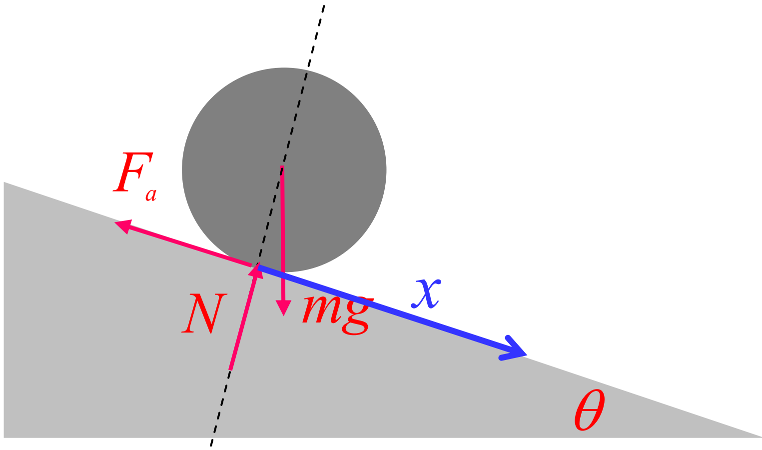
*Método 2: 2a.Lei de Newton (eixo passando pelo ponto de apoio)*

Embora haja translação do C.M., podemos considerar todo o movimento como apenas ROTAÇÃO em torno do eixo passando pelo ponto de apoio.

TORQUE : $\tau = mgr \operatorname{sen}\theta \qquad \tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{mgr \operatorname{sen}\theta}{I}$ Mas $v = r\omega \rightarrow a = r\alpha$

$\Rightarrow a = \dfrac{mgr^2 \operatorname{sen}\theta}{I} \Rightarrow a = \dfrac{g \operatorname{sen}\theta}{I/mr^2}$ Mas $I = I_o + mr^2 \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + I_o/mr^2}}$

## *Método 3: Conservação de Energia*




Após deslocamento $x$ (positivo p/baixo) :

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 - mgx \operatorname{sen}\theta = 0$$

Derivando em relação ao tempo:

$$I\frac{\cancel{v}}{r}\frac{a}{r} = mg\cancel{v}\operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow a = \frac{g\operatorname{sen}\theta}{I/mr^2} = \frac{g\operatorname{sen}\theta}{1 + I_o/mr^2}$$

B) Força de Atrito necessária para não haver deslizamento ?

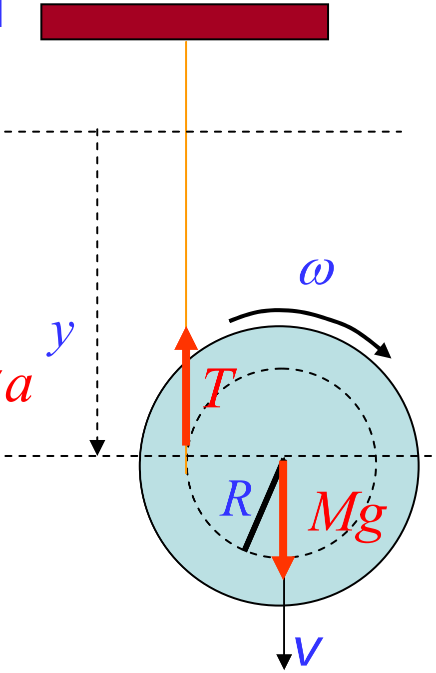
TRANSLAÇÃO DO CENTRO DE MASSA:

$$mg\operatorname{sen}\theta - F_a = ma = \frac{mg\operatorname{sen}\theta}{1 + I_o/mr^2} \qquad F_a = mg\operatorname{sen}\theta\left(1 - \frac{1}{1 + I_o/mr^2}\right) \Rightarrow \boxed{F_a = \frac{mg\operatorname{sen}\theta}{1 + mr^2/I_o}}$$

C) Condições para não haver deslizamento ?

$$\frac{mg\operatorname{sen}\theta}{1 + mr^2/I_o} < \mu N = \mu mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta < \mu(1 + mr^2/I_o) \quad \Rightarrow \quad \mu > \frac{\tan\theta}{1 + mr^2/I_o}$$

EXEMPLO: Um ioiô tem massa $M$ e momento de inércia $I$. O carretel onde se enrola o fio tem raio $R$. Determine a aceleação do centro de massa do ioiô e sua velocidade após ter se deslocado de $y$.




*Conservação da energia mecânica:*

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v^2 = Mgy$$

$$v = \omega R$$

$$v = \sqrt{\frac{2gy}{1 + \frac{I}{MR^2}}}$$

DERIVADA:

$$Mg\cancel{v} = \left(M + \frac{I}{R^2}\right)\cancel{v}\,a$$

$$a = \frac{Mg}{M + \frac{I}{R^2}}$$

*Leis de Newton:*

*FORÇAS:* $Mg,\ T$

TORQUE: $TR = I\alpha = I\dfrac{a}{R} \Rightarrow T = I\dfrac{a}{R^2}$

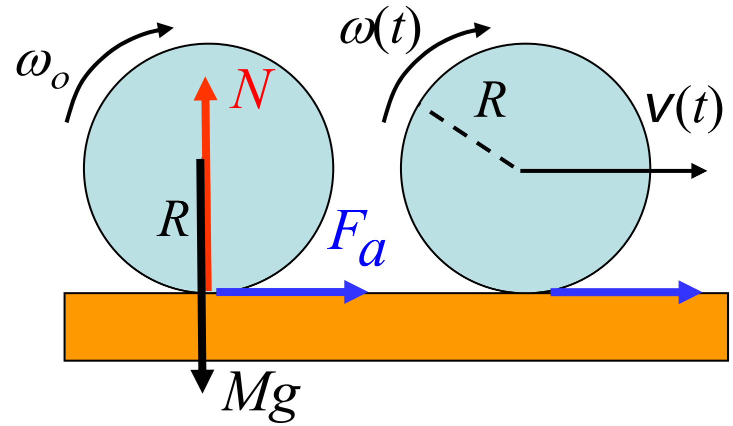
TRANSLAÇÃO: $Mg - T = Ma$

$$a = \frac{Mg}{M + \frac{I}{R^2}}$$

Usando-se $v^2 = 2ay$ obtém-se a velocidade.

EXEMPLO: *MOVIMENTO COM DESLIZAMENTO*

Corpo de massa $m$, raio $r$ e velocidade angular inicial $\omega_o$ é colocado sobre uma superfície plana, com a qual tem um coeficiente de atrito cinético $\mu$.



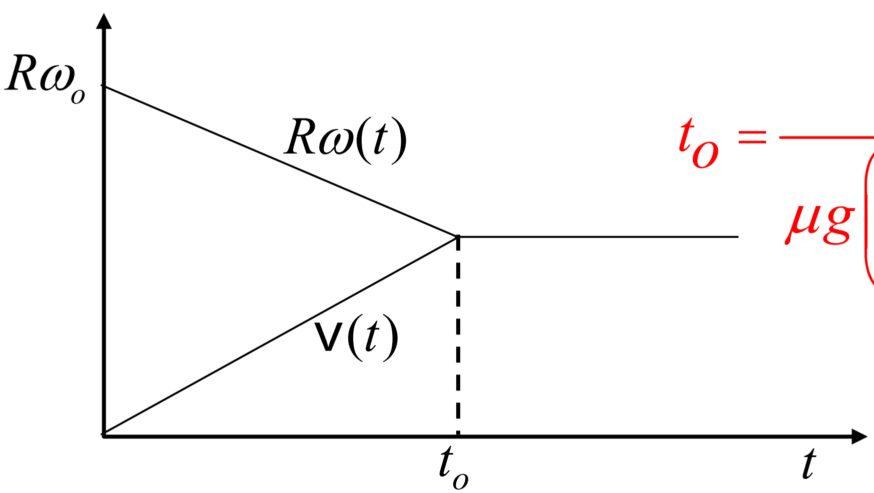

Determine $v(t)$ e $\omega(t)$.

FORÇAS: $N = Mg$ $\quad F_a = \mu N = \mu Mg$

Atrito acelera o centro de massa: $\mu Mg = Ma \quad \Rightarrow a = \mu g \quad \Rightarrow v = \mu g t$

Atrito desacelera a rotação: $I\alpha = -\mu MgR \quad \Rightarrow \alpha = -\dfrac{\mu MgR}{I} \quad \Rightarrow \omega = \omega_o - \dfrac{\mu MgR}{I} t$

$$t_o = ? \qquad R\omega(t_o) = v(t_o) \quad \Rightarrow R\omega_o - \frac{\mu MgR^2}{I} t_o = \mu g t_o$$



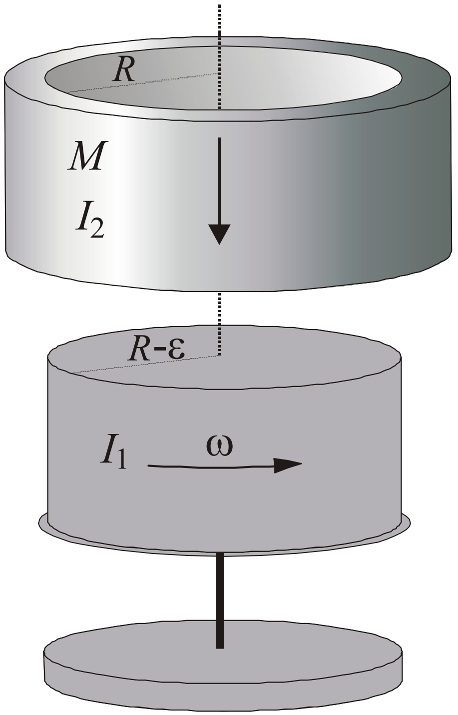

$$t_o = \frac{R\omega_o}{\mu g\left(1 + \dfrac{MR^2}{I}\right)} \qquad R\omega(t_o) = v(t_o) = \frac{R\omega_o}{\left(1 + \dfrac{MR^2}{I}\right)}$$

EXEMPLO: Refaça o problema supondo $\omega_o$ nula e $v_o$ diferente de zero.

## Conservação do Momento Angular

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad \mathbf{T} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{constante} \qquad \begin{cases} T_z = 0 \Rightarrow L_z = \text{constante} \\ T_x = 0 \Rightarrow L_x = \text{constante} \\ T_y = 0 \Rightarrow L_y = \text{constante} \end{cases}$$

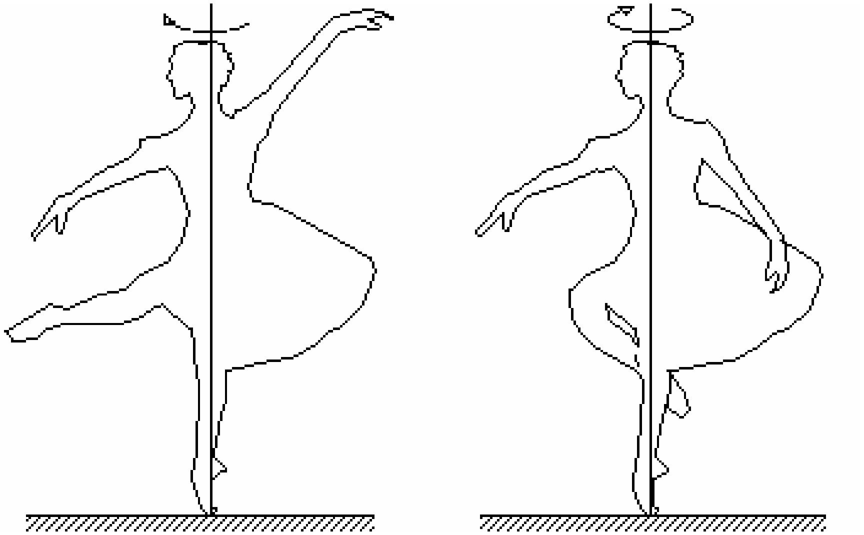
EXEMPLO: Um cilindro oco de raio interno R desce vestindo outro cilindro de raio ligeiramente menor, sem tocar nele, até tocar um pequeno ressalto na base inferior do cilindro de baixo. Este último cilindro gira sem atrito em torno de um eixo preso a uma plataforma fixa e sua velocidade angular inicial, antes do outro ser abaixado, era $\omega$. Determine a velocidade angular final do conjunto. Os momentos de inércia são dados na figura.




O torque externo sobre o sistema, na direção do eixo de rotação ($z$) é nulo $\longrightarrow$ $L_{z,i} = L_{z,f}$

$$\Rightarrow I_1\omega = (I_1 + I_2)\omega_f \quad \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega$$

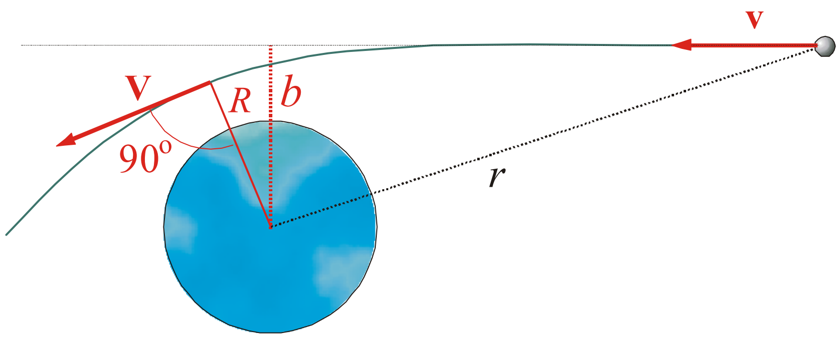
EXEMPLO: Bailarina inicialmente girando com velocidade angular $\omega_o$ com os braços abertos e uma perna esticada (momento de inércia $I_o$) repentinamente os fecha (momento de inércia $I_f$) .



As forças da gravidade e da normal exercem torque resultante nulo sobre o corpo da patinadora, portanto o seu momento angular só é afetado pela força de atrito, de torque muito pequeno. Desprezando-se a força de atrito:

$$I_o \omega_o = I_f \omega_f \quad \Rightarrow \omega_f = \frac{I_o \omega_o}{I_f}$$

EXEMPLO: *Distância mínima entre um meteoro e a Terra* – Um meteoro em uma trajetória próxima à Terra está a uma distância $r$ até o seu centro e velocidade ***v***, medida no referencial da Terra.




Determine a menor distância entre a trajetória do meteoro e o centro da Terra.

Momento angular inicial $L_O = m\mathrm{v}b$

No ponto de aproximação mínima, a velocidade do meteoro será ortogonal à linha que vai dele ao centro da Terra; senão, a distância ao centro da Terra estaria diminuindo ou aumentando, não sendo portanto um valor mínimo. Assim, naquele ponto o momento angular do meteoro será $L_R = mVR$

Conservação do momento angular: $m\mathrm{v}b = mVR \quad \Rightarrow \quad V = \frac{b}{R}\mathrm{v}$

Conservação da energia $\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mV^2 - G\frac{Mm}{R}$

Resolvendo esse sistema: $R = \dfrac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + (\mathrm{v}^2 - 2G\frac{M}{r})b^2\mathrm{v}^2}}{\mathrm{v}^2 - 2G\frac{M}{r}}$