

Matéria Escura em Galáxias Espirais¹

Domingos S.L. Soares

Departamento de Física — ICEx
UFMG

15 de Dezembro de 2010

¹Texto originalmente escrito, em 1992, para a *Escola de Inverno* do Departamento de Física. Apesar de desatualizado em relação ao material bibliográfico, mantém-se, sob o aspecto astrofísico, bastante atual.

Sumário

1	Introdução	3
2	Rotação de Galáxias Espirais	9
3	Galáxias Espirais Binárias	15
4	Visões Alternativas	21
4.1	Dinâmica Newtoniana Modificada	21
4.2	O valor de M/L	24
5	Problemas e Questões	29
	Referências	31

Capítulo 1

Introdução

Uma das questões mais intrigantes da Astronomia moderna é a que se refere à presença de matéria escura no Universo. Quando dizemos matéria “escura” não estamos nos referindo apenas à matéria que não podemos ver com os nossos olhos. As observações astronômicas atuais são feitas não somente na região ótica do espectro eletromagnético, região esta transmitida pela atmosfera e detectada pelo olho humano, mas também nas faixas de raios X (estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias), raios gama (*supernovae*), radiação infravermelha (núcleos galácticos, nuvens moleculares) e ultravioleta (estrelas), e ondas de rádio (estrelas pulsantes e gás galáctico). Podemos então medir a radiação emitida por uma galáxia em todos estes comprimentos de onda e através desta radiação calcular a massa da galáxia, baseando-se no conhecimento do comportamento físico da radiação dos elementos constituintes de uma galáxia (estrelas, gás, poeira).

Podemos também determinar a massa de uma galáxia a partir do movimento de suas estrelas constituintes utilizando-se as leis de gravitação de Newton. Ao compararmos os dois resultados obtidos para a massa galáctica (a massa “luminosa” e a massa “dinâmica”) verificamos que a massa luminosa (diretamente observada) é sistematicamente menor que a massa dinâmica (calculada). A conclusão que se tira é a de que deve haver na galáxia matéria não-radiante, portanto, escura.

Um outro aspecto importante é que a distribuição de matéria obtida a partir do movimento de estrelas em galáxias, e do movimento de galáxias em aglomerados, difere substancialmente da distribuição de luminosidade nas galáxias e nos aglomerados. Se a luminosidade de uma galáxia fôsse um indicador provável da distribuição de massa, a massa de uma galáxia deveria ser concentrada perto de seu centro, o que acarretaria que longe da região nuclear da galáxia as velocidades orbitais das estrelas deveriam

decrecer inversamente com a raiz quadrada da distancia ao centro, como consequência da lei dos períodos de Kepler, da mesma forma que é observado para as velocidades orbitais dos planetas no sistema solar. Por outro lado, observações tanto em comprimentos de onda na faixa ótica como na faixa de rádio, indicam que as velocidades orbitais em galáxias permanecem essencialmente constantes e com valores elevados à medida que se aumenta a distancia da região nuclear.

A interpretação mais imediata deste resultado é a de que uma fração significativa da massa de uma galáxia se distribui de forma diferente da massa radiante e se estende bem além dos limites visíveis da galáxia, constituindo uma componente de matéria escura na forma de um halo. A força gravitacional devida a esta matéria invisível seria então responsável pelas altas velocidades orbitais observadas.

Mas não foi a partir da observação do movimento interno de galáxias individuais que se chegou originalmente à hipótese da existência de matéria escura no Universo. A primeira evidencia da existência de matéria escura foi obtida na década de 30 pelo astrônomo suíço F. Zwicky. Ele verificou que as galáxias do aglomerado de Coma estavam movendo-se tão rápido que a atração gravitacional mútua das galáxias, calculada a partir de sua massa luminosa, era insuficiente para mantê-las no aglomerado. Admitindo-se que o aglomerado já atingira o equilíbrio dinâmico, Zwicky concluiu então que deveria haver matéria escura em quantidade suficiente para manter as galáxias ligadas gravitacionalmente umas às outras.

Inicialmente os astrônomos pensaram que o problema de matéria não-radiante fôsse uma característica exótica de aglomerados de galáxias, sem relação alguma com galáxias isoladas. A importância do trabalho observacional recente é que ele demonstra que a presença de matéria escura é também uma propriedade de galáxias individuais.

Galáxias se agrupam em pequenos e grandes grupos (os aglomerados, com até 1000 galáxias ou mais). O mais simples destes grupos é o que possui duas galáxias, recebendo então o nome de sistema binário de galáxias. Galáxias binárias podem também ser usadas para uma investigação do campo gravitacional mútuo, através de um estudo orbital. Desta maneira, a massa das galáxias presentes no par pode ser determinada. Neste aspecto as galáxias binárias podem ser comparadas às estrelas binárias, com a diferença fundamental de que, no caso de galáxias, os períodos orbitais são muito longos, da ordem de grandeza da idade do Universo em alguns sistemas, enquanto que no caso de estrelas os objetos podem ser observados diretamente durante o seu movimento orbital mútuo, isto é, os períodos orbitais são às vezes da ordem de várias dezenas de minutos, ou horas. Como consequência, outros parâmetros dinâmicos como inclinação e excêntridade orbital e a fase do movimento orbital são inteiramente desconhecidos nos

sistemas de galáxias binárias. Os únicos dados observacionais existentes referem-se à separação aparente do par e à diferença de velocidades das galáxias na linha de visada. A alternativa para uma investigação mais detalhada reside num estudo estatístico, analisando-se um grande número de pares e adotando-se distribuições probabilísticas para os parâmetros físicos relevantes que são desconhecidos.

A vantagem do estudo de galáxias binárias no problema geral de matéria escura é que a distribuição de massa nas galáxias presentes no par pode ser investigada em regiões externas à parte visível das galáxias, de certa forma estendendo as observações de movimento orbital interno feitas em galáxias individuais. Some-se a isto a formulação teórica relativamente simples, pois trata-se do problema geral do movimento de dois corpos. Os trabalhos iniciais com galáxias binárias remontam à década de 30, com os trabalhos pioneiros do astrônomo sueco E. Holmberg. Desde então, evidências da presença de matéria escura em galáxias binárias têm sido freqüentes.

Existem vários candidatos para a constituição da matéria escura no Universo. A matéria ordinária é bariônica, isto é, formada por prótons e nêutrons. Se a matéria escura for bariônica, ela deverá estar na forma de objetos de massa muito menor do que a massa do Sol (estrelas anãs, planetas, etc), de tal forma que a sua radiação não pode ser detectada por ser fraca demais. Alguns cosmólogos estão convencidos de que a matéria escura não pode ser bariônica. Isto porque a densidade de matéria bariônica presente no Universo atual pode ser predita pelas teorias de formação do Universo, e evidências observacionais indicam que a densidade bariônica atual é consistente com a matéria luminosa existente.

Outra possibilidade refere-se a formas não-bariônicas de matéria. Várias partículas elementares têm sido sugeridas: neutrinos, gravitinos, fotinos, áxions, buracos-negros, e mesmo monopolos magnéticos. Neutrinos representam atualmente um dos mais fortes candidatos à matéria escura, apesar de não ser fato estabelecido experimentalmente se eles possuem massa. Em suma, este é um dos grandes problemas da hipótese de matéria escura, ou seja, não há qualquer evidência observacional direta de sua existência.

A partir da década de 70, a abundância das observações dos movimentos orbitais sistemáticos em galáxias espirais, ou seja, da rotação destes objetos, motivou o surgimento de uma explicação alternativa para o aparente paradoxo existente entre a previsão Kepleriana do comportamento da velocidade de rotação galáctica em função da distância ao centro galáctico e os resultados observacionais que indicavam velocidades mais elevadas do que os valores preditos. A hipótese alternativa é a de que a dinâmica (ou, a gravitação) Newtoniana não seria mais válida em escalas de distâncias galácticas, onde investiga-se pela primeira vez campos gravitacionais bastante fracos (acelerações da ordem de 10^{-8} cm/s², nas regiões exteriores das

galáxias). Da mesma forma que no limite de campos muito fortes, como no caso do movimento de Mercúrio, em que houve necessidade de uma modificação da teoria de gravitação Newtoniana para uma explicação satisfatória das anomalias observadas, o que foi conseguido com a Relatividade Geral de A. Einstein, sugere-se que no limite de campos muito fracos a gravitação Newtoniana também deva ser modificada. Em outras palavras, o problema de matéria escura não existiria, o que existe é uma inadequação das leis físicas à nova situação, ou seja, à situação em que os campos gravitacionais são muito fracos. Existem atualmente várias propostas de modificações da gravitação Newtoniana para os limites de campos fracos, sendo que a que tem-se mostrado mais eficiente e resistente à comprovação experimental é a teoria proposta pelo astrônomo e físico israelense M. Milgrom.

Milgrom sugere a existência de uma aceleração gravitacional crítica no Universo, abaixo da qual a dinâmica Newtoniana (a 2ª lei, efetivamente) deve ser modificada. Na prática, isto implica em uma modificação na lei de gravitação de Newton, que deixaria de ter a dependência com o inverso do quadrado da distância ao centro de forças. Com esta modificação as observações de rotação de galáxias podem ser explicadas, sem se recorrer à hipótese da existência de matéria escura.

Quando se pensa nesta controvérsia entre matéria escura e uma nova física (implicada pela modificação das leis de Newton) é instrutivo recordar o que ocorreu no caso do sistema solar. A descoberta do planeta Netuno no século passado representou um grande sucesso da hipótese de matéria escura em termos da gravitação Newtoniana. Medidas astronômicas muito precisas revelaram irregularidades no movimento de Urano. Isto levou Adams na Inglaterra e Le Verrier na França a independentemente prevêr a existência de um planeta exterior perturbando o movimento de Urano. Eles não apenas sugeriram a sua existência como também calcularam precisamente a sua órbita, e posteriormente Netuno foi descoberto. Por outro lado, o caso de Mercúrio foi bem diferente. Le Verrier achou que a precessão anômala da órbita de Mercúrio pudesse ser explicada por pequenos planetas situados entre Mercúrio e o Sol, novamente matéria escura, mas nenhum deles foi encontrado. Hoje sabemos que no limite de campos gravitacionais muito fortes, como é verificado na órbita de Mercúrio, novos efeitos aparecem, os quais precisam ser descritos por uma teoria de gravitação mais completa, no caso pela Teoria da Relatividade Geral. Não é de se surpreender que no limite de campos muito fracos, explorado agora pela primeira vez por observações astronômicas precisas, nos encontremos novamente com efeitos físicos que só possam ser corretamente descritos por uma nova teoria de gravitação.

Uma outra visão do problema, que começa a surgir exatamente agora, é a de que exista uma falha na escolha dos parâmetros físicos básicos uti-

lizados no modelo da matéria escura. Para se ter uma idéia, consideremos o dado fundamental em todo o modelo, a saber, a razão massa sobre luminosidade, M/L . O valor adotado, em torno de $5 M_{\odot}/L_{\odot}$, é cerca de 10 – 15 vezes menor que os valores obtidos em investigações de galáxias binárias. O valor adotado na hipótese resulta da consistência interna da própria teoria da matéria escura. Este fato é menosprezado devido à circunstância favorável de que é um valor que concorda com os valores de M/L determinados para a vizinhança local do Sol. A visão alternativa que pressupõe um valor mais elevado para M/L para as galáxias espirais pode prescindir da existência de um halo extenso de matéria escura, e, ao mesmo tempo, preservar intacto o arcabouço gravitacional Newtoniano.

Nas próximas seções discutiremos com mais detalhes os três aspectos salientados acima, e que relacionam-se com o problema da existência ou não de matéria não-radiante em galáxias espirais, a saber: a rotação de galáxias espirais, galáxias espirais binárias, e as explicações alternativas das observações de rotação galáctica que pressupõem ou uma modificação da dinâmica Newtoniana ou uma revisão nos parâmetros físicos adotados pela hipótese da matéria escura.

Capítulo 2

Rotação de Galáxias Espirais

Galáxias espirais constituem sistemas com simetria predominante de um disco. As estrelas, o gás e a poeira presentes nas galáxias espirais possuem movimentos orbitais sistemáticos, a saber, descrevem uma rotação em torno do núcleo galáctico.

A velocidade de rotação galáctica pode ser observada através de espectrogramas, onde o desvio Doppler de determinadas linhas espectrais é medido. Estas linhas podem ser linhas de absorção, em atmosferas estelares, linhas de emissão, em regiões gasosas ionizadas (denominadas regiões HII, ou de hidrogênio ionizado), ou linhas de emissão no comprimento de onda de 21 cm, originárias de nuvens de hidrogênio neutro. Os dois primeiros casos dão origem às chamadas medidas óticas de velocidade, porque tanto as linhas de absorção quanto de emissão possuem comprimentos de onda na região visível do espectro eletromagnético (de $\approx 4000 \text{ \AA}$ — violeta — a $\approx 7200 \text{ \AA}$ — vermelho). As medidas feitas no comprimento de onda de 21 cm são obtidas através de radiotelescópios. Esta linha encontra-se na faixa de comprimentos de onda de rádio.

Um gráfico que contenha a velocidade de rotação galáctica no eixo das ordenadas e o correspondente raio (distancia nuclear) no eixo das abscissas constitui a chamada curva de rotação galáctica. A seguir, a discussão será baseada na análise de uma curva de rotação.

As fronteiras visíveis de uma galáxia são usualmente definidas pela curva isofotal de brilho superficial galáctica de 25 mag/segarc^2 . O raio desta isofota é conhecido como o raio de de Vaucouleurs, ou o raio ótico da galáxia (R_{25}). As curvas de rotação óticas contém dados obtidos, geralmente, den-

tro deste limite, ou seja, dentro das fronteiras visíveis de uma galáxia. Curvas de rotação óticas têm sido obtidas por vários astrônomos. Destacam-se as curvas determinadas pelo grupo liderado pela astrônoma V. Rubin, pela sua alta qualidade.

Já as curvas de rotação de HI (hidrogênio neutro), também chamadas curvas de rotação de 21 cm, estendem-se bem além dos limites visíveis das galáxias, chegando em alguns casos a mais de $2 \times R_{25}$. Isto se deve ao fato de haver núvens de hidrogênio neutro naquelas regiões. As curvas de rotação de 21 cm de melhor qualidade são as obtidas pelos astrônomos holandeses, destacando-se o grupo liderado pelos astrônomos R. Sancisi e T.S. van Albada.

O problema da presença de matéria escura em galáxias espirais pode ser equacionado da seguinte forma. Espera-se que dentro dos limites visíveis de uma galáxia a velocidade de rotação possa ser explicada pela distribuição de massa visível, e que além destes limites a velocidade inicie um comportamento Kepleriano, a saber, diminua como $R^{-1/2}$. Isto porque admite-se que a distribuição de luz represente de forma confiável a distribuição de matéria. Para raios galácticos maiores que R_{25} a luminosidade galáctica quase que se confunde com a luminosidade de fundo do céu. Ou seja, acredita-se que este raio seja um limite bem definido das dimensões galácticas.

As curvas de rotação óticas podem ser razoavelmente bem explicadas supondo-se então que a luz emitida pela galáxia seja um indicador da massa da galáxia, e adotando-se valores para a razão massa sobre luminosidade, a chamada razão M/L. A partir da fotometria superficial de galáxias, em que mede-se o brilho superficial em função da distância nuclear, e com um valor para M/L, consegue-se obter a distribuição de massa visível de uma galáxia. A velocidade de rotação em função de R pode ser calculada usando-se basicamente a equação:

$$G \frac{M(R)m}{R^2} = k \frac{mV^2(R)}{R} \quad (2.1)$$

onde $M(R)$ é a massa interior a R , $V(R)$ é a velocidade de rotação em R , e G é a constante gravitacional. A constante k é da ordem da unidade e depende da geometria e da distribuição de massa. Para uma esfera, $k = 1$.

O que se obtém através deste procedimento é uma concordância razoável entre a curva de rotação ótica e a curva de rotação predita pela distribuição radial de luz das galáxias.

Os principais sinais de discrepância entre os valores observados e os valores esperados surgem quando se analisam as curvas de rotação de 21 cm. Ao invés da queda com $R^{1/2}$, esperada além de R_{25} , observa-se que os valores observados mantêm-se constantes, com aproximadamente o valor

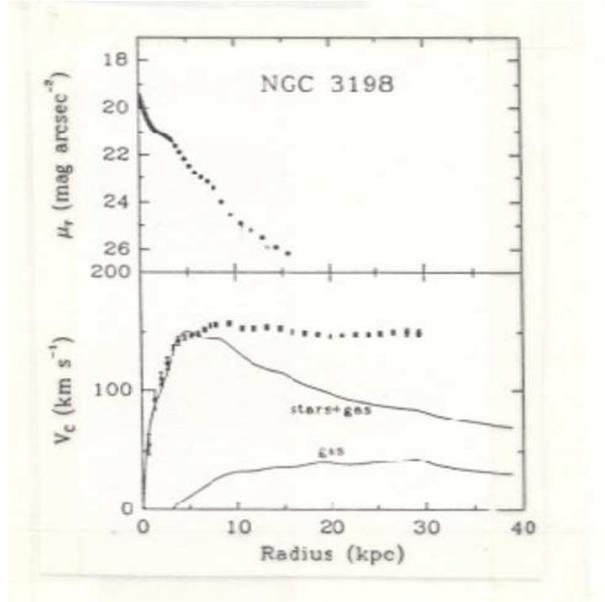


Figura 2.1: Fotometria superficial (diagrama superior) e curva de rotação de HI da galáxia espiral NGC 3198. Os pontos com barras de erro, no gráfico de velocidade versus raio galáctico, representam as velocidades de rotação de 21 cm medidas por K. Begeman. A curva de rotação predita pela luminosidade observada e razão M/L constante (3,8 neste caso) só consegue explicar as velocidades observadas até aproximadamente 70% de R_{25} (≈ 11 kpc, como pode ser verificado no diagrama de brilho superficial versus raio).

máximo de rotação medido opticamente. A Figura 2.1 mostra um exemplo típico deste comportamento.

A galáxia observada é NGC 3198, cujas medidas de rotação foram obtidas pelo astrônomo holandês K. Begeman, utilizando o radiotelescópio de Westerbork. A fotometria superficial, também mostrada na figura, foi obtida por S.M. Kent. Pode-se ver claramente no diagrama inferior que há uma grande discrepância entre a curva de rotação observada e a curva predita a partir da distribuição de luz, mostrada no diagrama superior da Fig. 2.1. Vê-se que já em R_{25} ($= 11,2$ kpc, em NGC 3198, adotando-se uma constante de Hubble $H_o = 75$ km/s/Mpc) o valor predito é inferior ao valor observado, e que a velocidade de rotação permanece aproximadamente constante até o último ponto observado, ou seja, até $\approx 2,5 \times R_{25}$. Se

$V = \text{constante}$ pode-se mostrar usando um argumento dinâmico simples que a densidade de massa galáctica deve diminuir com o quadrado do raio galáctico, isto é, $\rho(R) \propto R^{-2}$. Esta dependência da densidade com a distância ao centro galáctico implica que a massa galáctica interior a R deve aumentar linearmente com R . Esta massa, como se vê na Figura 2.1, não é observada no perfil de luz da galáxia, logo ela deve ser escura! Uma análise detalhada da curva de rotação de NGC 3198 mostra que deve haver na galáxia pelo menos 4 vezes mais matéria escura do que matéria luminosa.

Um ajuste perfeito entre a curva observada e a curva teórica pode ser obtido se se admite a existência de uma componente esférica de matéria escura (um halo escuro), cuja densidade varie com R na forma mencionada acima. A função $\rho(R)$ usualmente adotada, e que possui estas características, a saber, $\rho(R) \propto R^{-2}$ para valores grandes de R , é:

$$\rho(R) = \frac{\rho_o}{1 + (R/R_c)^2} \quad (2.2)$$

onde ρ_o é a densidade central do halo e R_c é o raio do caroço central do halo. Estas constantes determinam a forma como a massa se distribui no halo esférico, e o valor máximo da velocidade de rotação. Note-se que para valores pequenos de R/R_c , $\rho(R) \approx \rho_o$. Tais valores ocorrem para $R < R_{25}$, região em que a massa luminosa pode explicar a velocidade observada, não havendo necessidade de significativa quantidade de matéria escura. Geralmente o valor de ρ_o é muito pequeno comparado com a densidade de matéria luminosa. A densidade representada pela eq. 2.2 dá origem à seguinte curva de rotação:

$$V^2(R) = 4\pi G \rho_o R_c^2 \left[1 - \frac{R_c}{R} \arctan\left(\frac{R}{R_c}\right) \right] \quad (2.3)$$

com uma velocidade assintótica $V_{max} = (4\pi G \rho_o R_c^2)^{1/2}$, atingida em valores muito grandes de R .

Podemos dizer então que galáxias espirais, em geral, podem ser representadas por uma distribuição de massa que possui essencialmente duas componentes: uma componente de massa luminosa, a qual pode ser obtida observacionalmente a partir da distribuição de luz da galáxia, e uma componente de massa escura, a qual pode ser representada por um halo esférico, de acordo com a eq. 2.2.

A Figura 2.2 mostra o resultado obtido por K. Begeman para NGC 3198 quando ele adicionou o halo, na distribuição de massa total da galáxia. Como se vê, o ajuste obtido é notável. Para finalizar, um importante ponto. Vê-se na Fig. 2.2 que seria interessante obter-se informação a respeito da rotação galáctica após o último ponto observado, localizado à aproximadamente $2,5 \times R_{25}$. Aparentemente, não há mais gás a ser observado, ou se

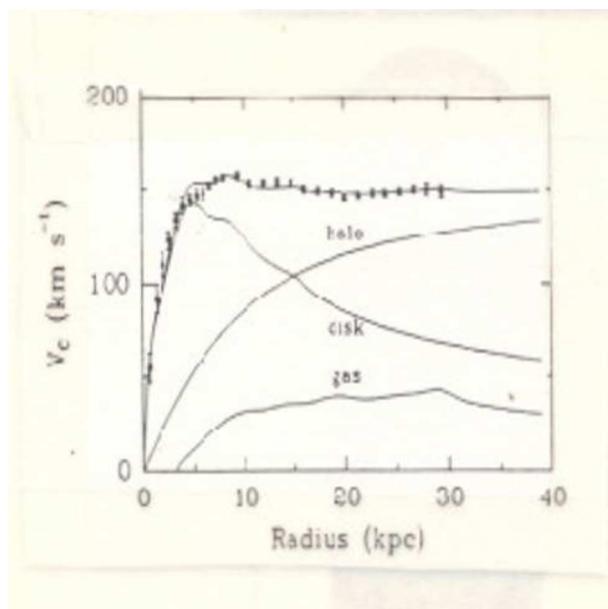


Figura 2.2: A curva de rotação observada de NGC 3198 (pontos) é perfeitamente explicada quando se adiciona um halo esférico escuro à distribuição de massa luminosa (estrelas) e hidrogênio neutro.

há, a sua densidade é tão baixa que se torna de difícil detecção. A questão fundamental é se existe um meio de se estender a curva de rotação para distâncias maiores, a fim de se verificar se, eventualmente, o comportamento Kepleriano é atingido. Podemos formular o problema de outra forma. São os halos escuros finitos, ou estendem-se indefinidamente?

Daí surge a necessidade de se estudar os vizinhos mais próximos de uma galáxia, os quais são constituídos por outras galáxias. Aqui reside a importância do estudo dos sistemas binários de galáxias. A distribuição de massa galáctica pode neste caso ser examinada em escalas de distâncias bem maiores que as atingidas pelo estudo da distribuição de hidrogênio neutro numa galáxia individual.

Na próxima seção falaremos do estudo de galáxias binárias no contexto da discrepância de massa em galáxias espirais.

Capítulo 3

Galáxias Espirais Binárias

As galáxias são observadas não somente isoladas mas freqüentemente em grupos de multiplicidade variada. Dentre estes, desperta grande interesse os sistemas binários de galáxias. O tratamento teórico é relativamente simples, ou seja, em princípio podemos considerar o problema dinâmico de galáxias binárias como o problema de duas massas puntiformes em órbita mútua.

Como já mencionamos na Introdução o problema se complica devido ao fato de não termos acesso observacional a parâmetros físicos fundamentais em qualquer estudo orbital, tais como período, inclinação, fase e excentricidade orbitais. Períodos orbitais típicos são da ordem de milhões de anos. A solução reside na adoção de um tratamento estatístico de uma amostra de galáxias binárias, que contenha um grande número de pares. A idéia é a de que cada sistema binário presente na amostra representaria uma das infinitas possibilidades existentes no espaço de parâmetros físicos do movimento orbital de um único sistema.

Caímos então em outra dificuldade. Como definir de forma precisa uma amostra de pares de galáxias que sejam realmente ligados gravitacionalmente? A proximidade de duas galáxias no plano do céu pode ser fruto do acaso, ou seja, as galáxias apesar de próximas em projeção podem estar de fato bastante afastadas na direção da linha de visada, não apresentando qualquer interação gravitacional mútua. Tais sistemas constituem os chamados “pares óticos”. A contaminação de uma amostra de galáxias binárias por pares óticos deve ser evitada para que a análise dinâmica da amostra seja confiável. O que se consegue na melhor das hipóteses no entanto é ter-se uma estimativa estatística da contaminação presente em determinada amostra.

Para assegurar a presença de pares realmente físicos, os estudos originais

de galáxias binárias, feitos por E. Holmberg e T. Page, nas décadas de 30 e 50, respectivamente, consideravam apenas pares relativamente próximos. A separação média dos pares era de aproximadamente 50 kpc, um valor igual a cerca de duas vezes o diâmetro de uma galáxia espiral típica. Desta forma diminuía-se a possibilidade de contaminação por pares óticos, mas ao mesmo tempo excluía-se da amostra possíveis pares cuja fase orbital implicava em posições próximas de separações apocêntricas. A amostra não constituía assim uma amostra realmente aleatória no espaço de parâmetros orbitais, em outras palavras, qualquer grandeza média obtida com a amostra de pares não corresponderia a uma média temporal feita em uma órbita. Dizemos então que a amostra em consideração é prejudicada por “efeitos de seleção”.

Estudos recentes tentam diminuir os efeitos de seleção na determinação de amostras de galáxias binárias. Em geral, os métodos atuais para esta determinação baseiam-se no estudo da distribuição estatística de galáxias no plano do céu, procurando-se detectar galáxias que não se ajustem à distribuição esperada, ou seja, a uma distribuição aleatória, no caso em questão, a uma distribuição probabilística de Poisson. Pares e grupos de maior multiplicidade são desta forma identificados.

Tendo em vista os aspectos levantados acima, vemos que para se utilizar galáxias binárias em qualquer análise dinâmica devemos ter uma amostra de pares selecionada com critérios bem definidos, passíveis de reprodução em simulações através de algoritmos apropriados, de tal forma que tanto a contaminação por pares óticos (não-físicos) como a influencia dos efeitos intrínsecos ao método de seleção (efeitos de seleção) possam ser determinadas quantitativamente, e incorporados na análise dinâmica da amostra.

A consequência deste tratamento mais completo será a possibilidade de se ter um número razoável de pares cujas galáxias possuam separações relativamente grandes, ou seja, bem maior que as dimensões visíveis das galáxias constituintes dos pares. As separações de até duas vezes o diâmetro galáctico obtidas nos estudos clássicos de galáxias binárias não são adequadas para um estudo da distribuição de massa em grandes escalas de distâncias.

Uma avaliação da quantidade de matéria escura em galáxias espirais pode ser feita, usando-se dados observacionais de galáxias binárias, da seguinte forma. Dados a separação projetada no plano do céu (R_p), e a diferença de velocidades na linha de visada (ΔV) para um par de galáxias, e supondo-se que as duas galáxias são massas puntiformes em órbita mútua, podemos calcular a massa total do sistema (M) através de

$$\chi_p M = \frac{R_p \Delta V^2}{G} \quad (3.1)$$

onde χ_p é um fator de projeção que depende dos parâmetros orbitais, e é dado por:

$$\chi_p = \frac{\text{sen}^2 i}{1 + e \cos \nu} [\cos(\nu + \omega) + e \cos \omega]^2 [1 - \text{sen}^2(\nu + \omega) \text{sen}^2 i]^{1/2} . \quad (3.2)$$

Nesta expressão i é o ângulo de inclinação do plano orbital com relação à linha de visada, ν é a coordenada polar angular que fornece a posição de uma galáxia com relação à outra na órbita (também chamada anomalia verdadeira), ω é o ângulo entre a linha dos nós e o eixo maior da órbita, e e é a excentricidade orbital. A diferença de velocidades ΔV é obtida a partir do desvio para o vermelho cosmológico, observado em linhas espectrais presentes na radiação emitida pelas galáxias.

É interessante notar que para uma dada excentricidade, χ_p tem um valor máximo igual a

$$\chi_{p,max}(e) = 1 + e . \quad (3.3)$$

As condições angulares para uma projeção máxima são $i = \pi/2$, $\nu = 0$ e $\omega = 0$. A eq. 3.3 pode ser prontamente verificada levando-se estes valores na eq. 3.2. Para órbitas circulares, isto é $e = 0$, $\chi_{p,max} = 1$, e para órbitas com excentricidade alta, $e \rightarrow 1$, $\chi_{p,max} \rightarrow 2$.

Podemos considerar a eq. 3.1 na sua forma mais simples, a saber, para o caso de órbitas circulares, e satisfazendo as condições de projeção máxima, para se obter uma estimativa aproximada de um limite inferior para a quantidade de matéria escura presente em galáxias espirais. Consideraremos a amostra de galáxias binárias extraída do *Catalogue of Multiple Galaxies*, CMG, criado pelo astrônomo holandês T.S. van Albada, e apresentado e analisado por D.S.L. Soares e T.S. van Albada em 1989.

A Figura 3.1 apresenta a amostra, com 230 pares de galáxias, representada no plano $\Delta V \times R_p$ (diagrama a) e no plano $\Delta V/L_B^{1/2} \times R_p$ (diagrama b). L_B é a luminosidade total do sistema binário, emitida na cor azul, e expressa em unidades de $1 \times 10^{11} L_{B\odot}$ ($L_{B\odot}$ é a luminosidade solar na cor azul). Esta normalização é útil devido à existência de pares com diferentes luminosidades. O diagrama b apresenta os valores de ΔV que os pares teriam se todos eles tivessem a mesma luminosidade total. Para se ter uma referência a respeito dos valores de M/L_B compatíveis com as observações, traçamos no diagrama b da Fig. 3.1 as curvas que representam os valores máximos de ΔV , supondo-se que as galáxias estão em órbitas circulares ($e = 0$; eq. 3.1 com $\chi_p = 1$), e que possuem massa total igual a $4 \times 10^{11} M_\odot$ (curva inferior) e massa total igual a $40 \times 10^{11} M_\odot$. O primeiro destes valores corresponde a uma razão massa sobre luminosidade $M/L_B = 4 M_\odot/L_{B\odot}$, e o segundo a $M/L_B = 40 M_\odot/L_{B\odot}$. Agora, os

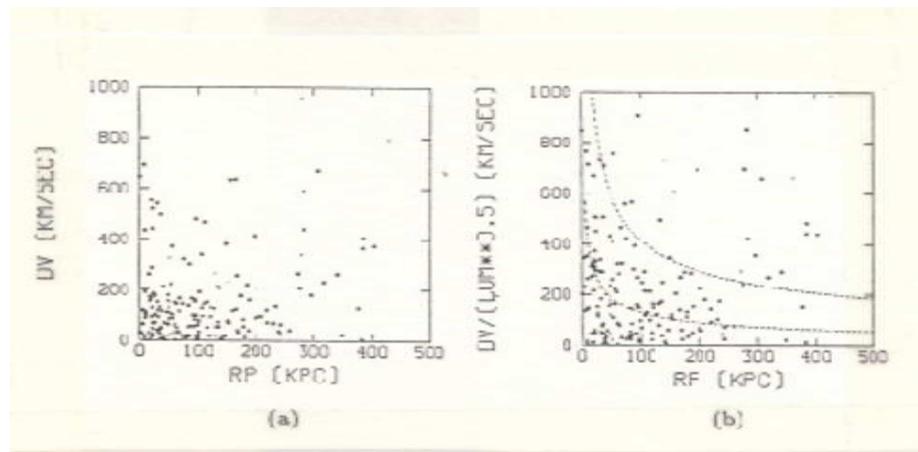


Figura 3.1: A diferença de velocidades de galáxias binárias versus a separação aparente do par é mostrada no diagrama a. No diagrama b a diferença de velocidades foi normalizada, utilizando-se como fator de normalização a raiz quadrada da luminosidade total do par, na cor azul. A luminosidade é considerada em unidades de $1 \times 10^{11} L_{B\odot}$. A curva inferior no diagrama b representa os valores máximos de ΔV para duas massas puntiformes em órbitas circulares, e com $M/L_B = 4$. A curva superior corresponde a $M/L_B = 40$.

valores típicos de M/L_B para galáxias espirais, considerando-se a luz emitida na região interior a R_{25} , são segundo V. Rubin e colaboradores 6,2, 4,5 e 2,6, em unidades de $M_\odot/L_{B\odot}$ e com a constante de Hubble $H_o = 75$ km/s/Mpc, para galáxias espirais Sa, Sb, e Sc, respectivamente. Como se vê na Fig. 3.1b, os dados observacionais de galáxias binárias só podem ser explicados se admitirmos que M/L_B é, no mínimo, da ordem de 40. Em outras palavras, deve haver matéria escura nas galáxias constituintes das binárias. Esta massa é denunciada pela análise dinâmica do movimento orbital destas binárias.

Uma investigação mais realista de galáxias binárias foi feita por D.S.L. Soares considerando as galáxias presentes nos pares não como massas puntiformes mas como distribuições extensas de massa. Os resultados confirmam a análise qualitativa feita acima, e indicam que halos escuros esféricos presentes em galáxias espirais conseguem explicar os dados observacionais. Tais halos devem ser no mínimo seis vezes mais extensos do que as dimensões visíveis das galáxias, ou seja, devem ter raios de no mínimo $6 \times R_{25}$.

Capítulo 4

Visões Alternativas

A hipótese de matéria escura em galáxias espirais para se explicar o comportamento observado das curvas de rotação galáctica tem o inconveniente sério de se basear em algo (a matéria escura) que nunca foi detectado diretamente e, conseqüentemente, não tem existência comprovada. Uma solução aparentemente mais natural seria a consideração de uma modificação na teoria de gravitação utilizada nos modelos dinâmicos adotados no estudo de galáxias. Outra solução seria a de se fazer uma revisão completa nos pressupostos básicos adotados na construção do modelo de matéria escura, mantendo intacta, no entanto, a teoria de gravitação Newtoniana. O pressuposto principal adotado na hipótese da matéria escura é o que admite para toda e qualquer galáxia espiral um valor de M/L semelhante ao encontrado na vizinhança local do Sol. Levando-se em consideração que a região local abrange um volume esférico, centrado no Sol, de raio igual a ≈ 100 pc, torna-se bastante razoável uma investigação em torno de uma possível revisão nos parâmetros adotados presentemente na construção do modelo da matéria escura.

A seguir, discutiremos estas duas visões alternativas para a interpretação das observações da rotação galáctica.

4.1 Dinâmica Newtoniana Modificada

Na literatura astronômica recente várias sugestões de modificações deste tipo tem sido apresentadas. Algumas delas sugerem que a lei de gravitação de Newton deve ter uma dependência com a distancia ao centro de forças (R) diferente de $1/R^2$. Esta modificação deveria ocorrer em escalas de distancias acima de determinada distancia crítica. Tais modificações não

estão de acordo com as observações pois prevêem que as discrepâncias entre massa vista e massa dinâmica seriam grandes para galáxias grandes e pequenas para galáxias pequenas. As galáxias variam em tamanhos na faixa de aproximadamente 8 a 80 kpc, mas observa-se que a razão matéria escura sobre matéria luminosa é comparável para as galáxias nesta faixa.

Uma sugestão mais bem sucedida, com relação aos fatos observacionais, é a do astrônomo israelense M. Milgrom, que propõe a existência de um desvio da lei do inverso do quadrado da distancia sempre que se esteja lidando com acelerações abaixo de determinada aceleração crítica. Este valor crítico ocorreria nos limites visíveis de galáxias espirais e corresponderia a uma nova constante universal. Na sua formulação original a teoria de Milgrom apresenta-se como uma modificação da dinâmica Newtoniana, donde o fato de ser conhecida como MOND, ou *Modified Newtonian Dynamics*. No contexto de MOND a segunda lei de Newton é escrita como:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}\mu(x) \quad (4.1)$$

onde $x = a/a_o$, e a_o é a aceleração crítica mencionada acima. A função $\mu(x)$ tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 ; x \gg 1 \\ \mu(x) &= x ; x \ll 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

A função $\mu(x)$ funciona como uma função de interpolação entre o regime de acelerações maiores que a_o ($x > 1$) e o regime de acelerações menores que a_o ($x < 1$), não sendo especificada *a priori*. Em princípio, qualquer função que satisfaça as condições de contorno dadas pelas eqs. 4.2 é satisfatória.

A eq. 4.1 pode ser interpretada como uma modificação da propriedade de inércia de um corpo, a qual passa a depender da aceleração do corpo.

Podemos reescrever a eq. 4.1 como

$$\mu(x)\mathbf{a} = \mathbf{a}_N, \quad (4.3)$$

onde \mathbf{a}_N é a aceleração Newtoniana convencional e \mathbf{a} é a aceleração verdadeira de módulo igual a xa_o .

Milgrom mostrou, posteriormente, que MOND pode ser interpretada também como uma modificação da gravitação Newtoniana. A velocidade de rotação de um corpo de prova situado a uma distancia R de uma massa M é dada por $V(R) = Ra(R) = Ra_N(R)/\mu(x)$. No regime de acelerações grandes, $x \gg 1$, caímos na dinâmica Newtoniana ordinária, pois $\mu(x) = 1$. Para $x \ll 1$, obtém-se:

$$a(R) \simeq (a_N a_o)^{1/2} = \frac{(GMa_o)^{1/2}}{R} \quad (4.4)$$

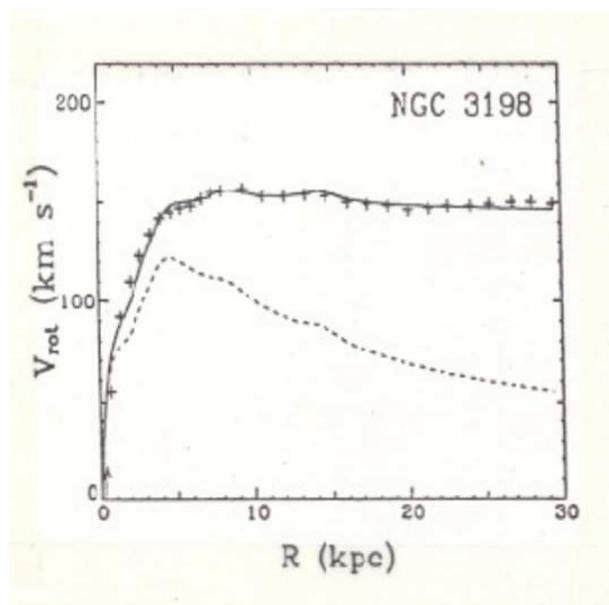


Figura 4.1: Curva de rotação observada de NGC 3198 (cruzes) e o ajuste obtido usando-se a Dinâmica Newtoniana Modificada (MOND). A curva tracejada representa a curva de rotação obtida diretamente do perfil de brilho superficial, mostrado na Fig. 2.1, com $M/L = 4$, e dinâmica Newtoniana convencional.

$$V^2(R) \simeq (GMa_o)^{1/2} \quad (4.5)$$

O valor de $V(R)$ dado pela eq. 4.4 é o valor assintótico da velocidade de rotação para grandes valores de R , no regime de baixas acelerações. Este valor pode ser identificado nas curvas de rotação de galáxias espirais como o valor da velocidade na região em que a velocidade é constante.

A constante a_o foi determinada por Milgrom usando as curvas de rotação de galáxias espirais e a eq. 4.4. O valor encontrado foi de $2 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ ($H_o = 50 \text{ km/s/Mpc}$).

Para exemplificar a aplicação de MOND na análise de curvas de rotação de galáxias espirais usaremos novamente a galáxia NGC 3198. S.M. Kent determinou observacionalmente o perfil radial de brilho superficial desta galáxia (vêr Fig. 2.1, acima). Usando este perfil de luminosidade, uma razão $M/L = 4$, e $\mu(x) = x/(1+x^2)^{1/2}$ ele obteve um excelente ajuste entre valores observados e valores teóricos de velocidade de rotação. A Figura 4.1 mostra o resultado deste ajuste (curva contínua) e, para comparação, os valores preditos pela distribuição de massa luminosa e aplicação da dinâmica Newtoniana convencional (curva tracejada).

Comparando-se a Fig. 2.1 com a Fig. 4.1, vê-se que tanto a hipótese de halos escuros quanto MOND conseguem um excelente resultado na explicação da curva de rotação observada de NGC 3198. Esta é uma das muitas galáxias em que ambas as teorias conseguem uma explicação satisfatória das observações. Não se pode, no presente momento, afirmar-se qual das duas teorias é a correta.

4.2 O valor de M/L

O procedimento padrão para o ajuste de curvas de rotação de galáxias espirais pode ser resumido como se segue. Obtém-se o perfil de brilho superficial da galáxia em estudo, isto é, a variação da densidade superficial de luminosidade aparente da galáxia em função da distancia ao centro galáctico. Supondo-se que o brilho superficial observado seja um indicador da massa luminosa estelar da galáxia, adota-se simplesmente um fator constante M/L para a conversão de $L(R)$ em $M(R)$. Com o auxílio da eq. 2.1, obtém-se a curva de rotação desejada. O parâmetro livre é a razão M/L .

O procedimento acima é incapaz de gerar uma curva de rotação que se ajuste aos valores observados, se se mantém um valor constante para M/L . Para o ajuste dos valores observados da rotação em $R > R_{25}$ necessita-se de aumentar o valor de M/L por um fator de até 200. Em outras palavras, nas regiões exteriores das galáxias espirais há uma enorme quantidade de matéria não-luminosa. Daí a conveniência de se supor a existência de um

halo escuro, envolvendo a parte luminosa da galáxia, e estendendo-se por distâncias de até $6 \times R_{25}$.

Considerando-se apenas a região luminosa da galáxia ($R < R_{25}$), é possível obter-se um bom ajuste da curva de rotação observada utilizando-se um valor constante para M/L . O valor assim obtido concorda com os valores de M/L encontrados na vizinhança solar, a partir da função luminosidade estelar, i.e., a partir da contagem de estrelas. Este fato vai de encontro à suposição generalizada de que o valor de M/L solar ($\approx 4 M_{\odot}/L_{\odot}$) deveria ser válido para toda e qualquer galáxia espiral. A consequência deste círculo vicioso é a convicção de que não há problemas de discrepância de massa na região visível das galáxias espirais, e que o problema só aparece quando se está medindo a rotação galáctica nas regiões em que predomina a existência de material predominantemente não-luminoso (hidrogênio neutro — HI).

Agora, consideremos uma mudança de enfoque. Admitamos, por princípio, que a razão M/L de galáxias espirais é aquela obtida de maneira global para as galáxias. O estudo de galáxias binárias, por exemplo, fornece uma estimativa deste valor, o qual resulta ser 10 – 15 vezes superior ao valor comumente aceito para a vizinhança solar. Adotemos este valor, em conjunto com o perfil de brilho superficial observado de uma dada galáxia. Tomemos o exemplo de NGC 3198, já mencionada acima. É óbvio que a curva de rotação predita não se ajustará, mesmo nas regiões em que $R < R_{25}$, e estará com valores superiores por um fator de $\sqrt{10} - \sqrt{15}$ vezes.

A questão importante agora passa a ser a seguinte. Qual é o processo físico responsável pela redução dos valores de rotação preditos até os níveis observados, em $R < R_{25}$? Em outras palavras, como conciliar a curva de rotação calculada, utilizando-se um valor maior para a razão M/L , com os valores observados?

A resposta a esta questão envolve uma investigação detalhada dos processos físicos que ocorrem dentro de uma galáxia espiral. À guisa de exemplo, podemos sugerir um modelo simples, sem grande rigor na formulação, mas que ilustra de forma adequada o tipo de abordagem que deveria ser feita. Este tipo de modelo é muitas vezes referido, no idioma inglês, como um *toy model*. Vamos designá-lo aqui como um *modelo de brinquedo*.

Consideremos então o nosso modelo de brinquedo. Seja uma galáxia espiral constituída basicamente por dois elementos: gás e estrelas. Tanto as estrelas quanto o gás distribuem-se num sistema de simetria axial, achatado, ou seja, num disco. A componente gasosa estende-se por distâncias galactocêntricas maiores que a componente estelar, cuja extensão será caracterizada pelo raio de de Vaucouleurs (R_{25}). Sendo assim, a componente gasosa pode se estender até por $\approx 6 \times R_{25}$, mas possui massa desprezível em relação à componente estelar, que é portanto responsável pela dinâmica

do sistema.

A componente gasosa constitui-se por sua vez de duas subcomponentes, a saber: um disco liso e, subjacente a este, a outra subcomponente formada por nuvens de gás neutro ou ionizado (nuvens de hidrogênio neutro — HI — e regiões de hidrogênio ionizado — regiões HII). Estas nuvens possuem uma escala de comprimento característica $l \ll R_{25}$.

A componente gasosa apesar de não ser dinamicamente ativa, dada a sua pequena massa, pode ser usada para se traçar o potencial gravitacional galáctico. Isto é conseguido, como vimos, obtendo-se uma curva de rotação galáctica, onde as velocidades referem-se a esta componente. Consideremos, por conseguinte, as curvas de rotação galácticas observadas a partir do desvio Doppler da linha de 21 cm, na faixa de comprimentos de onda de rádio, emitida pelo hidrogênio neutro (HI), principal componente das nuvens de gás.

Como já vimos, no presente modelo de brinquedo admitimos que cada nuvem de HI está imersa na camada gasosa subjacente e, portanto, além da atração gravitacional devido à massa estelar, sofre também uma força de empuxo, em sentido oposto à força gravitacional, a qual é central. Esta força de empuxo é causada pelo meio gasoso liso que a envolve, e funciona efetivamente como uma forma de diminuir a atração gravitacional estelar sobre a nuvem. O potencial galáctico efetivo sobre uma nuvem de massa m será considerado como dado por

$$U(r) = \frac{GM}{r} \left(1 + \beta e^{-r/r_o} \right) , \quad (4.6)$$

onde M é a massa galáctica estelar, β e r_o são parâmetros galácticos de escala, em princípio diferentes de galáxia para galáxia. Trata-se simplesmente do potencial criado por uma massa puntiforme M acrescido de uma componente do tipo Yukawa, que representa os efeitos de empuxo. Para o tipo de efeito da força de empuxo que necessitamos a constante β deve ser negativa. A partir da eq. 4.6 podemos obter a velocidade de rotação galáctica em função da distancia galactocêntrica:

$$V(r) = \left\{ \frac{GM}{r} \left[1 + \beta \left(1 + \frac{r}{r_o} \right) e^{-r/r_o} \right] \right\}^{1/2} . \quad (4.7)$$

A Fig. 4.2 ilustra o comportamento do modelo de brinquedo proposto aqui, através de várias curvas de rotação. A curva tracejada representa a curva de rotação Kepleriana, sem os efeitos de empuxo. Este tipo de modelo-tentativa foi proposto em 1992 por D.S.L. Soares, e serve como uma idéia alternativa tanto às formulações que envolvem a necessidade de substancial quantidade de matéria escura num halo extenso, quanto àquelas que defendem a adoção de uma nova teoria de gravitação.

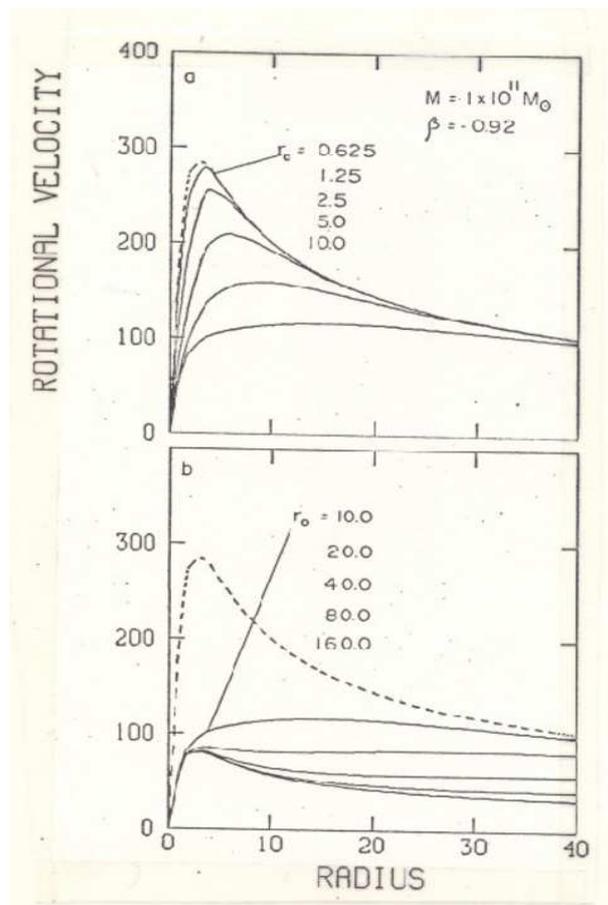


Figura 4.2: Modelo de brinquedo descrito pela eq. 4.6 com $M = 1 \times 10^{11} M_{\odot}$, $\beta = -0.92$, e valores diferentes para r_0 . No diagrama a, a partir da curva contínua superior, temos $r_0 = 0,625, 1,25, 2,5, 5, 10$ kpc. O diagrama b segue com $r_0 = 10, 20, 40, 80, 160$ kpc. A curva tracejada é a curva de rotação Kepleriana usual, sem os efeitos devidos ao potencial de empuxo (as velocidades estão dadas em km s^{-1} e os raios em kpc).

Este modelo prevê resultados distintos daqueles obtidos com a componente gasosa, quando se considera curvas de rotação determinadas a partir da componente estelar. Obviamente as estrelas não “sentem” o empuxo mencionado acima, e devem obedecer à curva obtida a partir da eq. 2.1. Deve-se ressaltar, por outro lado, que praticamente não existem curvas de rotação estelares para galáxias espirais. Para se obter estas curvas são necessárias observações do desvio Doppler de linhas de absorção, originárias das camadas atmosféricas superiores das estrelas. Devido à dificuldade de identificação de tais linhas no espectro galáctico, tais medidas não são feitas, preferindo-se as medidas de linha de emissão muito mais estreitas, e de fácil determinação (freqüentemente usa-se as linhas de $H\alpha$, [NII], etc). Estas linhas são emitidas pela componente gasosa. Mesmo no caso da medida de absorção, deve-se tomar o cuidado de se excluir linhas características de estrelas de população I, estrelas OB jovens, por exemplo. Tais estrelas guardam as características cinemáticas do meio gasoso onde se formaram, devendo fornecer resultados essencialmente semelhantes aos obtidos de observações do gás, quanto às curvas de rotação.

Além de tudo isto, um outro ponto importante é o de que a região galáctica de maior interesse para se detectar as diferenças previstas pelo modelo é a que apresenta a maior dificuldade na medida de velocidades de rotação. Como bem enfatiza S. Kent, observações de HI raramente têm resolução adequada para mapear as regiões internas das galáxias ($R < R_{25}$) e, observações óticas, possíveis nestas regiões, podem oferecer resultados de velocidades contaminados por movimentos não-circulares.

Apesar de tudo o que foi dito acima, podemos resumir a idéia de como se testar o modelo de brinquedo proposto nesta seção. Deve-se obter em primeiro lugar curvas de rotação a partir de observações de linhas de absorção, as quais referem-se à componente estelar propriamente dita, e não à componente gasosa. Os resultados obtidos para as estrelas devem em seguida ser confrontados com os dados obtidos do gás (observações óticas, a partir de linhas de emissão de regiões HII, e observações da linha de 21 cm, de HI, quando possível). Uma consequência imediata do modelo é a de que as curvas de rotação estelares (correspondentes a estrelas do disco, velhas) não deve coincidir com a curva de rotação do gás, fornecendo velocidades superiores, para uma mesma distancia ao centro galáctico.

Capítulo 5

Problemas e Questões

1. Considere como modelo para uma galáxia a distribuição de massa $M(R) = M_o R^3 / (R^2 + R_o^2)^{3/2}$. Este modelo é conhecido como modelo de Plummer e pertence à família das distribuições politrópicas. Neste caso temos uma politropa de índice igual a 5. Calcule a curva de rotação de um corpo de prova submetido ao potencial gravitacional desta galáxia. Esboce a curva $V(R)$ versus R e mostre que para $R \gg R_o$ tem-se $V(R) \propto R^{-1/2}$. Como você definiria o raio ótico (R_{25}) desta galáxia ?
2. Mostre que se a velocidade de rotação de um corpo de prova, num potencial criado por uma distribuição de massa $M(R)$, é constante, então $M(R) \propto R$.
3. Obtenha a eq. 2.3 e mostre que para $R \gg R_c$, $V(R) = V_{max} = (4\pi G \rho_o R_c^2)^{1/2}$.
4. Dê algumas razões que justifiquem o modelo de galáxias binárias que considera as galáxias no par como massas puntiformes. Dê algumas razões que justifiquem o abandono de tal modelo.
5. Deduza as equações das curvas mostradas na Figura 3.1b. Confira as suas equações dando valores para R_p e verificando o resultado para $\Delta V / L_B^{1/2}$ na figura.
6. Sugira uma expressão matemática para o potencial gravitacional de uma galáxia, de tal forma que a força sobre um corpo de prova seja inversamente proporcional ao quadrado da distancia R até o centro da galáxia, se $R \ll R_t$, e inversamente proporcional a R , se $R \gg R_t$,

onde R_t representa uma determinada distancia de transição. Esboce a curva de rotação do corpo de prova submetido a este potencial.

7. Verifique se a função $\mu(x)$ adotada por Kent na análise de NGC 3198 possui as propriedades expressas pelas eqs. 4.2.
8. Sugira um experimento físico ou um programa observacional astronômico que poderia contribuir para se decidir entre as hipóteses de matéria escura e de MOND.
9. Considere o problema da discrepância de massa em galáxias espirais. Em vista das várias tentativas de solução para o mesmo, qual delas lhe parece mais plausível? Justifique a sua escolha utilizando argumentos físicos e astronômicos.

Referências

Os artigos, teses e livros que estão listados a seguir são imprescindíveis para uma melhor compreensão do problema geral da existência ou não de matéria escura em sistemas astronômicos.

Um ponto importante a se ressaltar é o de que este é um tema controverso e objeto de intensas investigações no momento. O resultado destas investigações têm implicações profundas tanto em Astrofísica, quanto em Cosmologia e na Física de Partículas Elementares.

A maioria das referências vem acompanhada da indicação do capítulo ou da seção à que elas se referem. A ausência desta indicação significa que a referência em questão é útil para todos os capítulos.

Albada, T.S. van, Bahcall, J.N., Begeman, K.G., Sancisi, R. 1985, *Astrophys. J.* **295**, 305 (Capítulo 2)

Albada, T.S. van, Sancisi, R. 1986, *Phil. Trans. Royal Soc. Lond.* **A 320**, 447 (Capítulo 2)

Begeman, K.G. 1987, *Tese de Doutorado*, Universidade de Groningen, Holanda (Capítulo 2)

Begeman, K.G. 1989, *Astron. Astrophys.* **223**, 47 (Capítulo 2)

Begeman, K.G., Broeils, A.H., Sanders, R.H. 1991, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **249**, 523 (Capítulo 2, Seção 4.1)

Binney, J., Tremaine, S. 1987, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, Princeton

Bowers, R.L., Deeming, T. 1984, *Astrophysics*, Jones and Bartlett Publishers, Inc., Boston

Broeils, A.H. 1992, *Astron. Astrophys.* **256**, 19 (Capítulo 2, Seção 4.1)

- Faber, S.M., Gallagher, J.S. 1979, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **17**, 135 (Capítulos 1, 2 e 3)
- Karachentsev, I.D. 1985, *Sov. Astron.* **29**, 243 (Capítulo 3)
- Kent, S.M. 1986, *Astron. J.* **91**, 1301 (Capítulo 2)
- Kent, S.M. 1987, *Astron. J.* **93**, 816 (Capítulo 2, Seção 4.1)
- Milgrom, M. 1983, *Astrophys. J.* **270**, 365 (Seção 4.1)
- Milgrom, M. 1986, *Astrophys. J.* **302**, 617 (Capítulo 3, Seção 4.1)
- Milgrom, M. 1988, *Astrophys. J.* **333**, 689 (Seção 4.1)
- Mihalas, M., Binney, J. 1981, *Galactic Astronomy*, W.H. Freeman and Company, San Francisco
- Moorsel, G.A. van 1982, *Tese de Doutorado*, Universidade de Groningen, Holanda (Capítulo 3)
- Moorsel, G.A. van 1987, *Astron. Astrophys.* **176**, 13 (Capítulo 3)
- Oosterloo, T.A. 1988, *Tese de Doutorado*, Universidade de Groningen, Holanda (Capítulo 3)
- Peterson, S.D. 1979, *Astrophys. J. Suppl. Series* **40**, 527 (Capítulo 3)
- Rubin, V.C., Burstein, D., Ford, W.K., Jr., Thonnard, N. 1985, *Astrophys. J.* **289**, 81 (Capítulo 2)
- Sanders, R.H. 1990, *Astron. Astrophys. Rev.* **2**, 1 (Capítulo 2, Seção 4.1)
- Schweizer, L.Y. 1987, *Astrophys. J. Suppl. Series* **64**, 427 (Capítulo 3)
- Shu, F.H. 1982, *The Physical Universe, An Introduction to Astronomy*, Oxford University Press, Oxford
- Soares, D.S.L. 1989, *Tese de Doutorado*, Universidade de Groningen, Holanda (Capítulo 3, Seção 4.1)
- Soares, D.S.L. 1990, *Astron. Astrophys.* **238**, 50 (Capítulo 3)
- Soares, D.S.L. 1992, *Rev. Mex. de Astron. y Astrof.* **24**, 3 (Seção 4.2)

Turner, E.L. 1976, *Astrophys. J.* **208**, 304 (Capítulo 3)

Zeilik, M., Gregory, S.A., Smith, E.v.P. 1992, *Introductory Astronomy and Astrophysics*, Saunders, USA