

# Capítulo 9

## Medidas e Interpretação de estados

No capítulo anterior falamos sobre a preparação e determinação de estados. Neste capítulo vamos discutir a inclusão no formalismo do aparato de medida. Iniciamos com um exemplo simples, de como a medida de uma variável fundamental do sistema (exemplo, o spin de uma partícula) é medido através de uma propriedade microscópica que surge da interação do aparato de medida (exemplo, aparato de Stern-Gerlach) com aquela variável. Colocado este exemplo passamos para a formalização de o que este tipo de interação pode causar no sistema. Este desenvolvimento é chamado teoria das medidas, construída respeitando a álgebra linear e teoria da probabilidade, e fornece argumentos técnicos para a discussão de questões relacionadas à interpretação da função de onda, em particular sobre a especulação do seu “colapso” no processo de medida.

### 9.1 Um exemplo de medição de spin (aparato de Stern-Gerlach)

Considere uma partícula (ou um feixe) com momento magnético que passa por um campo magnético inhomogêneo em um aparato de Stern-Gerlach. A energia potencial associada ao momento magnético é  $-\mathbf{B} \cdot \vec{\mu}$ . O gradiente de sinal negativo dessa energia é a força magnética sobre a partícula que, portanto, é função de  $\mathbf{B}$ . Como  $\vec{\mu}$  depende de  $\mathbf{S}$ , o spin da partícula, então esse é um método que permite determinar a componente do spin a partir da deflexão da partícula.

Consideremos que o campo magnético atua apenas na região dos ímãs e está na direção  $z$ . Escolheremos um sistema de referência que se move com

a partícula, ou seja, para o qual ela está em repouso. A partícula sentirá um campo magnético variável no tempo apenas num intervalo de tempo  $0 < t < T$  em que ela se move na região de campo magnético. Nessa região o hamiltoniano da partícula é dado por:

$$H(t) = -cz\sigma_z, \quad 0 < t < T. \quad (9.1)$$

com  $c$  uma constante que envolve o gradiente de campo e a magnitude do momento magnético. Partindo-se do estado inicial:

$$|\psi_0\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle, \quad (9.2)$$

onde  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  representam o spin para cima e para baixo, respectivamente, a solução da equação de Schrödinger nos dará como estado para  $t > T$ :

$$|\psi_t\rangle = ae^{iTcz/\hbar}|+\rangle + be^{-iTcz/\hbar}|-\rangle. \quad (9.3)$$

Esse exemplo serve para apresentar o conceito mais importante desse capítulo: o aparato de medida estabelece uma correlação entre variáveis dinâmicas do sistema em estudo e variáveis mensuráveis através do aparato experimental. No caso do aparato de Stern-Gerlach estamos criando uma correlação entre o momento da partícula na direção  $z$ ,  $P_z = Tc$ , que pode ser medido macroscopicamente através do deslocamento da partícula, e o spin da mesma: se  $\sigma_z = +1$  temos  $P_z = +Tc$ , e se  $\sigma_z = -1$  temos  $P_z = -Tc$ . É essa correlação que permite a medida e a identificação da medida com a grandeza física de relevância.

## 9.2 Teorema geral da teoria das medidas

Os ingredientes essenciais para se estabelecer medidas em mecânica quântica consistem no objeto de estudo (I) a ser medido, num aparato de medida (II), e no procedimento que produz a correlação entre as variáveis de (I) com as variáveis indicadoras de (II).

Considere uma variável dinâmica  $R$ , assumida discreta por simplicidade. O operador  $R$  possui um conjunto completo de autovetores

$$R|r\rangle^{(I)} = r|r\rangle^{(I)}. \quad (9.4)$$

O aparato (II) tem uma variável indicadora  $A$  que também possui um conjunto completo de autovetores:

$$A|\alpha, m\rangle^{(II)} = \alpha|\alpha, m\rangle^{(II)}, \quad (9.5)$$

em que  $\alpha$  é autovalor de  $A$  e  $m$  identifica todos os outros números quânticos necessários para especificar um autovetor único.

O aparato, então, é preparado num estado inicial pré-medida,  $|0, m\rangle^{(II)}$  com  $\alpha = 0$ . Introduzimos, então, uma interação entre (I) e (II) que produz uma correspondência única entre os valores  $r$  e  $\alpha$ . Essa interação é conduzida por um operador unitário  $U$ . Suponha que o estado inicial de (I) seja um autovetor de  $R$ . Logo o estado inicial de (I) + (II) será  $|r\rangle^{(I)} \otimes |0, m\rangle^{(II)}$ . Se, adicionalmente, requeremos que a medida não deve mudar o valor da quantidade a ser medida, então teremos:

$$U|r\rangle^{(I)} \otimes |0, m\rangle^{(II)} = |r\rangle^{(I)} \otimes |\alpha_r, m\rangle^{(II)}. \quad (9.6)$$

Aqui supomos que os valores de  $r$  e de  $m$  não são mudados pela interação. Podemos tornar, entretanto, esse argumento mais geral ao perceber que não é necessário supor que (I) e (II) continuem inalterados após a medição. Uma medição fidedigna apenas requer que haja uma relação unívoca entre o estado inicial  $r$  e o indicador final  $\alpha_r$ . Logo, a possibilidade mais geral é:

$$U|r\rangle^{(I)} \otimes |0, m\rangle^{(II)} = \sum_{r', m'} u_{r, m}^{r', m'} |r'\rangle^{(I)} \otimes |\alpha_r, m'\rangle^{(II)} = |\alpha_r; (r, m)\rangle. \quad (9.7)$$

onde  $(r, m)$  denota o estado inicial que deve estar atrelado ao resultado final por uma transformação unitária.

Consideremos, agora, que o estado inicial do objeto de estudo (I) não é um autoestado específico de  $R$ , mas é dado por:

$$|\psi\rangle^{(I)} = \sum_r c_r |r\rangle^{(I)}. \quad (9.8)$$

Pela equação (9.7) e pela linearidade do operador  $U$  temos:

$$U|\psi\rangle^{(I)} \otimes |0, m\rangle^{(II)} = \sum_r c_r |\alpha_r; (r, m)\rangle = |\Psi_m^f\rangle, \quad (9.9)$$

sendo o sobre-índice  $f$  uma forma de denotar o estado final. Note que o estado final não é um autoestado específico de  $A$ , mas uma **superposição coerente** de autovetores macroscopicamente distintos. Coerentemente, a probabilidade de uma medida de  $A$  resultar no autovalor  $\alpha_r$  é dada por  $|c_r|^2$ , consistente com a probabilidade de se encontrar o autoestado  $|r\rangle$  no estado inicial do objeto em estudo, de acordo com (9.8).

### 9.3 Interpretação do vetor de estado

O estado final  $|\Psi_m^f\rangle$  não é um autoestado do operador indicador  $A$ , ou seja, indicador não tem um estado definido. Essa característica de superposição

coerente para o estado final pode ser discutida de duas formas diferentes, dependendo de como interpretamos o estado final:

- A. Um estado puro produz uma descrição completa e exaustiva de um sistema individual.
- B. Um estado puro descreve uma propriedade estatística de um ensemble de sistemas igualmente preparados.

A interpretação A é muito comum em diversos textos de mecânica quântica, principalmente nos mais antigos. Essa interpretação, porém, encontra sérios problemas quando confrontada com o teorema das medidas (§9.2).

### 9.3.1 O gato de Schrödinger

Como o estado final  $|\Psi_m^f\rangle$  não é um autoestado da variável indicadora, então podemos concluir, de acordo com a interpretação A, que o indicador não tem valor definido. Isso não é uma indefinição microscópica palatável, mas sim uma indefinição macroscópica, que não é observável! Um exemplo é o experimento mental conhecido como paradoxo do gato de Schrödinger. Neste experimento, o estado microscópico é dado por  $|\Psi^{(I)}\rangle = (1/\sqrt{2})[|d\rangle + |nd\rangle]$ , onde  $|d\rangle$  e  $|nd\rangle$  representam o átomo nos seus estados *decaído* e *não decaído*, sendo que no estado decaído a radiação libera um veneno que mata o gato. O estado final é, então, dado por  $|\Psi^{(I,II)}\rangle = (1/\sqrt{2})(|d\rangle|morto\rangle + |nd\rangle|vivo\rangle)$ , e o gato encontra-se no estado indefinido, vivo ou morto.

### 9.3.2 Consistência com a teoria da medida

Vamos analisar a consistência desta interpretação com o teorema da medida. Um primeiro conceito que deve ser questionado é como o estado final indefinido dá origem a um estado único medido,  $|\Psi_m^f\rangle \rightarrow |\alpha_r; (r, m)\rangle$ ? Este é o conceito de **colapso da função de onda**. Entretanto, se a mecânica quântica representa uma descrição completa da natureza, a princípio qualquer procedimento responsável por essa evolução de estados deveria ser passível de representação na teoria da medida. Seja uma perturbação do objeto pelo aparato de medida, seja o processo de tomada de consciência por parte do experimentador (“o gato está vivo!”), seja uma interação com todo o universo, qualquer destes processos podem ser pensados como incluídos em  $U$ .

Resta analisar então se esta incapacidade de definição da teoria da medida poderia estar atrelada a indefinição do estado inicial. Considere um estado

geral descrito pelo operador de estado para o sistema (I) + (II):

$$\rho^i = \sum_m w_m |\Psi_m^i\rangle\langle\Psi_m^i|, \quad (9.10)$$

onde o somatório inclui todas as possibilidades de estados relacionadas aos números quânticos  $m$  que são indefinidos no experimento. Aqui  $w_m$  denota a probabilidade associada a cada estado possível do aparato de medida. Esse número pode indicar uma quantidade muito maior de números quânticos do que o indicador  $\alpha$ , pode incluir todo o universo e a nossa consciência. A interpretação A requer que o estado final seja uma mistura de autovetores de indicadores com a forma diagonal com respeito a  $\alpha_r$ :

$$\rho^d = \sum_r |c_r|^2 \sum_m w_m |\alpha_r; (r, m)\rangle\langle\alpha_r; (r, m)|, \quad (9.11)$$

o sobrescrito  $d$  em  $\rho^d$  denota um operador diagonal. Qualquer termo não-diagonal representaria uma superposição coerente que deve ser evitada para sustentar a tese de que a indefinição do estado inicial é que gera a impossibilidade de a teoria da medida descrever o processo de medidas apropriadamente. Entretanto, a conjectura de a equação (9.11) só ter termos na diagonal não é compatível com a álgebra linear. O estado final após o processo de medição é:

$$\rho^f = U \rho^i U^\dagger = \sum_m w_m |\Psi_m^f\rangle\langle\Psi_m^f|, \quad (9.12)$$

em que  $|\Psi_m^f\rangle = U|\Psi_m^i\rangle$ . Portanto, de acordo com a álgebra linear, encontra-se:

$$\rho^f = \sum_{r_1} \sum_{r_2} c_{r_1}^* c_{r_2} \sum_m w_m |\alpha_{r_1}; (r_1, m)\rangle\langle\alpha_{r_2}; (r_2, m)|. \quad (9.13)$$

Essa construção permite  $\alpha_{r_1} \neq \alpha_{r_2}$ , que indica uma superposição coerente de autovetores macroscopicamente distintos do operador indicador. Desta forma, concluímos que a interpretação A leva ao conceito do colapso da função de onda, que é inconsistente com a teoria da medida. Como esta teoria fundamenta-se nas mesmas bases da teoria quântica, que são a álgebra linear e a teoria da probabilidade (veremos mais sobre isso a frente), a interpretação A não se sustenta.

Todos estes problemas desaparecem quando consideramos a interpretação B: o operador de estado é uma quantidade que deve ser utilizada para calcular a distribuição de probabilidade de variáveis dinâmicas, como descrito pelo postulado 2 da mecânica quântica (§2.1). Este operador descreve as propriedades dos resultados possíveis em um ensemble de sistemas igualmente preparados.

### 9.3.3 Onde está a incerteza?

Considere um feixe de elétrons (vários elétrons igualmente preparados) onde existe uma incerteza na definição da energia dos elétrons do feixe. Supondo que o vetor de estado descreve um elétron individual (interpretação A), devemos considerar que cada elétron tem uma energia bem definida, e a incerteza no feixe está na comparação entre dois elétrons, ou devemos considerar que cada elétron carrega ele próprio a incerteza?

Para analisar esta questão consideremos um feixe de elétrons que se move da esquerda pra direita em uma dimensão espacial. Suponhamos, primeiro, que cada elétron é descrito por uma onda plana,  $\psi_k(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ , com energia  $\hbar\omega = \hbar^2 k^2 / 2M$  bem definida, e a distribuição de energia observada nos permite inferir a densidade de probabilidade de distribuição de frequências no feixe,  $W(\omega)$ . O operador de estado para o feixe neste caso é:

$$\rho = \int |\psi_k\rangle \langle \psi_k| W(\omega) d\omega, \quad (9.14)$$

que na representação das coordenadas fica:

$$\rho(x, x') = \int \psi_k(x, t) \psi_k^*(x', t) W(\omega) d\omega = \int e^{ik(x-x')} W(\omega) d\omega. \quad (9.15)$$

A partir desse resultado podemos calcular o padrão de interferência e qualquer outra quantidade física de interesse.

Suponhamos, agora, que cada elétron é descrito como um pacote de onda com uma distribuição de energia:

$$\psi_{t_0}(x, t) = \int A(\omega) e^{i[kx - \omega(t-t_0)]} d\omega, \quad (9.16)$$

com pacotes de ondas diferentes sendo distinguidos devido ao tempo inicial  $t_0$  em que são emitidos. Supondo que o tempo de emissão segue uma distribuição uniforme estamos interessados em calcular os elementos de matriz do operador de estado através de um valor esperado temporal:

$$\begin{aligned} \langle x | \rho | x' \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \psi_{t_0}(x, t) \psi_{t_0}^*(x', t) dt_0 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int A(\omega) e^{i[kx - \omega(t-t_0)]} d\omega \int A^*(\omega') e^{-i[k'x' - \omega'(t-t_0)]} d\omega' dt_0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Essa integral é não-nula, após tomar o limite, exceto para  $\omega = \omega'$  e então a função de estado será:

$$\rho(x, x') = \int e^{ik(x-x')} |A(\omega)|^2 d\omega. \quad (9.18)$$

Note que as equações (9.18) e (9.15), têm a mesma forma, distintas apenas pelo uso do  $|A(\omega)|^2$  ou  $W(\omega)$ , que foi introduzido por nós diferenciando as duas possibilidades. Isto mostra que a natureza da incerteza em energia do elétron neste caso não leva a uma consequência observável, e sua discussão é, efetivamente, inócua, colocando em cheque a interpretação A.

Por outro lado, considerando a interpretação B, podemos entender que o operador  $\rho$  descreve o estado gerado pelo processo de preparação, que gera um ensemble de sistemas, sem qualquer necessidade de especular a respeito de uma função de onda de um elétron individualmente. Consideremos, por exemplo, um feixe de elétrons gerados por emissão térmica. Podemos obter o operador de estado para o sistema considerando que, no cenário de Schrödinger,  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  pois  $[H, \rho] = 0$  para estados estacionários. E, como vale a equação de autovalores,  $H|\psi_\omega\rangle = \hbar\omega|\psi_\omega\rangle$  teremos que:

$$\rho = \int |\psi_\omega\rangle\langle\psi_\omega|W(\omega)d\omega, \quad (9.19)$$

cuja representação das coordenadas é o mesmo resultado que já tínhamos obtido.

### 9.3.4 O “colapso” da função de onda

Como visto em §9.3.1, o dito colapso da função de onda é um fenômeno necessário quando adotamos a interpretação A, sem nenhuma clareza do que gera este colapso, e ainda inconsistente com a teoria da medida (§9.3.2). Um experimento tipo recombinação de spins pode ser explorado para abordar o tema.

O experimento consiste em um feixe de nêutrons com spins polarizados na direção  $+z$  que incide em um cristal e é transmitido através do feixe AC e sofre uma reflexão de Bragg no feixe AB. O mesmo ocorre em B e em C, porém os feixes que saem do aparato nesses pontos não têm importância para o experimento e não estão representados (veja Fig.9.1).

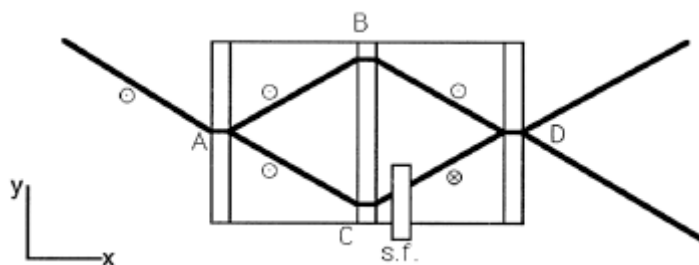


Figura 9.1: Figura do experimento de recombinação de spins. Extraído de [2].

Um dispositivo que inverte o spin (inversor) é inserido no feixe CD, e os spin para cima e spin para baixo são recombinados no ponto D. O estado de spins dos feixes que emerge à direita do experimento são então determinados.

Seja  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  os autoestados spin para cima e spin para baixo, respectivamente, do operador  $\sigma_z$ . É razoável supor que os nêutrons no ponto B estão no estado de spin  $|+\rangle$  e os nêutrons que emergem do lado direito do conversor estão no estado  $|-\rangle$ . A pergunta importante é: qual será o estado de spin após a recombinação do feixe em D?

Se considerarmos que o processo de separação dos feixes em A é um processo de medida, similar ao processo utilizado na separação de spins com o aparato de Stern-Gerlach (§9.1), podemos nos questionar se em A acontece o colapso da função de onda. Neste caso, o estado de spin em D deve ser:

$$\rho^{inc} = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|), \quad (9.20)$$

que corresponde uma mistura incoerente de spins para cima e para baixo.

Se, por outro lado, não há um colapso da função de onda em A, nem em B, nem em C, nem no inversor de spin, só no detector colocado em D, então a coerência é mantida e o estado de spins medido será da forma:

$$\rho^{coe} = |u\rangle\langle u|, \quad (9.21)$$

com:  $|u\rangle = \frac{e^{i\alpha}|+\rangle + e^{i\beta}|-\rangle}{\sqrt{2}}$ .

Estes dois resultados,  $\rho^{coe}$  e  $\rho^{inc}$  têm, entretanto, consequências mensuráveis. Pode-se mostrar que, no caso incoerente, não existe valor esperado do operador de spin na direção x e na direção z:  $\langle\sigma_x\rangle = \langle\sigma_z\rangle = 0$ . Já no caso coerente, temos que  $\langle\sigma_z\rangle = 0$  e  $\langle\sigma_x\rangle = \cos(\alpha - \beta)$ .

Em um experimento realizado por Summhammer *et al.* [29] foi observado uma dependência periódica em  $\langle\sigma_x\rangle$ , demonstrando que a superposição coerente é, de fato, a descrição correta do estado.

Resultados desta natureza implicam em uma grande subjetividade no conceito de colapso da função de onda. Quando ele ocorre? Que tipo de “medida” faz com que ele aconteça? A regra que parece prevalecer é que o colapso só teria lugar quando o experimentador puder “tomar consciência”, for capaz de distinguir os estados. Em outras palavras, dividir um feixe é um colapso de função de onda, se eles não forem juntados depois. Mas se forem, não é... toda esta subjetividade, mais uma vez, desaparece sem deixar vestígios quando se adota a interpretação B.



### 9.3.5 Considerações finais

Toda essa discussão dá base ao argumento de que a interpretação A leva, necessariamente, a conjecturas e conclusões, primeiro, desnecessárias, pois não têm utilidade prática, segundo, que não fazem sentido considerando o caráter probabilístico da mecânica quântica, advindo de seus postulados constitutivos. Entendemos, portanto, que a interpretação A deve ser abandonada e a interpretação B deve ser adotada.

## 9.4 Decoerência

A discussão feita em §9.3 não nega o fato de que existe o fenômeno de perda de coerência, que acontece pela interação das partículas com o “ambiente”, conceito que pode incluir o aparelho de medida e tudo o que não pode ser controlado no caminho por onde passam as partículas. Podemos abordar este conceito generalizando o exemplo da seção anterior (§9.3.4). Se ambas posição e operador de spin forem levados em conta, temos que:

$$|\Psi\rangle = \psi_+(\mathbf{x})|+\rangle + \psi_-(\mathbf{x})|-\rangle. \quad (9.22)$$

Ao longo de AB, AC e BD, os nêutrons têm spin para cima, e temos que  $\psi_-(\mathbf{x}) = 0$ . Ao longo de CD temos  $\psi_+(\mathbf{x}) = 0$ . Ambas componentes são não-nulas à direita de D e, assim, teremos o caso geral

$$\rho^{coe} = \begin{pmatrix} |\psi_+|^2 & \psi_+\psi_-^* \\ \psi_-\psi_+^* & |\psi_-|^2 \end{pmatrix}. \quad (9.23)$$

Vamos assumir que flutuações induzidas pelo ambiente (o que inclui o aparato de medida) ao longo dos caminhos (ABD e ACD) podem fazer com que os termos de interferência ( $\psi_+\psi_-^*$  e  $\psi_-\psi_+^*$ ) vão a zero, e  $\rho^{coe} \rightarrow \rho^{inc}$ . Isto acontece no caso de estas flutuações gerarem variações na diferença de fase ( $\alpha - \beta$ ) de forma que  $\psi_+\psi_-^*$  se torne igualmente distribuído em um ciclo no plano complexo. Neste caso estamos pensando em um efeito que não foi descrito no sistema. Podemos, entretanto, representar o estado completo como:

$$|\Psi\rangle = \psi_+(\mathbf{x})|+\rangle|a_1\rangle + \psi_-(\mathbf{x})|-\rangle|a_2\rangle, \quad (9.24)$$

onde os vetores  $|a_1\rangle$  e  $|a_2\rangle$  descrevem os estados do ambiente nos caminhos ABD e ACD, respectivamente, e o operador de estados em D tem a forma:

$$\rho = \begin{pmatrix} |\psi_+|^2 & \psi_+\psi_-^*\langle a_2|a_1\rangle \\ \psi_-\psi_+^*\langle a_1|a_2\rangle & |\psi_-|^2 \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

No caso em que  $|a_1\rangle = |a_2\rangle$ , temos  $\rho \rightarrow \rho^{coe}$ . Se  $|a_1\rangle$  e  $|a_2\rangle$  são ortogonais, temos  $\rho \rightarrow \rho^{inc}$ .

Efetivamente, não há diferença se consideramos o ambiente como parte do sistema ou não.

## 9.5 Probabilidades conjuntas e condicionais

Até aqui, nesse capítulo, descrevemos as medidas de uma quantidade única. A partir de agora iremos analisar uma sequência de medidas de duas ou mais variáveis dinâmicas e as correlações entre os valores dessas várias quantidades. A forma de entender isso é utilizando a teoria da probabilidade, através das distribuições de probabilidade conjuntas.

Recapitulado o axioma 4 da seção 1.4.2:

$$Prob(A\&B|C) = Prob(A|C)Prob(B|A\&C), \quad (9.26)$$

em que já identificamos o evento  $C$  como sendo a preparação do sistema,  $\rho$ . Denotaremos os eventos  $A$  e  $B$  como os operadores  $R$  e  $S$ , de duas variáveis dinâmicas, tais que:

$$R|r_n\rangle = r_n|r_n\rangle, \quad S|s_m\rangle = s_m|s_m\rangle. \quad (9.27)$$

Associados a  $R$  e  $S$  temos os projetores:

$$M_R(\Delta) = \sum_{r_n \in \Delta} |r_n\rangle\langle r_n|, \quad M_S(\Delta) = \sum_{s_m \in \Delta} |s_m\rangle\langle s_m|, \quad (9.28)$$

que projetam nos subespaços expandidos pelos autovetores cujos autovalores estão dentro do intervalo  $\Delta$ . Denotaremos  $A$  como sendo evento de medir na operação  $R$  um valor  $r_n$  no intervalo  $\Delta_a (R \in \Delta_a)$  e  $B$  como o evento de medir na operação  $S$  um valor  $s_m$  no intervalo  $\Delta_b (S \in \Delta_b)$ . O primeiro evento desses é medido em  $t_a$  e o segundo em  $t_b$ . Vamos, agora, avaliar cada termo do axioma 4 da teoria da probabilidade, equação (9.26).

O primeiro termo do lado direito da equação (9.26) é o mais simples por não apresentar condições conjuntas, e é dado por:

$$Prob(A|C) \equiv Prob(R \in \Delta_a|\rho) = Tr\{\rho M_R(\Delta_a)\}. \quad (9.29)$$

Já o termo da esquerda da equação (9.26) só pode ser avaliado utilizando o formalismo da mecânica quântica se houver um operador de projeção que corresponde ao evento composto  $A\&B$ . O produto  $M_R(\Delta_a)M_S(\Delta_b)$  é um operador projeção que projeta no subespaço expandido pelos autovetores

comuns a  $R$  e  $S$  se, e somente se,  $R$  e  $S$  apresentam uma base em comum, ou seja, se eles comutam. Neste caso a probabilidade conjunta será:

$$\begin{aligned} Prob(A\&B|C) &= Prob\{(R \in \Delta_a)\&(S \in \Delta_b)|\rho\} \\ &= Tr\{\rho M_R(\Delta_a)M_S(\Delta_b)\}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

A interpretação desse resultado é a probabilidade do resultado da medida de  $R$ , no tempo  $t_a$ , estar no intervalo  $\Delta_a$  e o resultado da medida de  $S$ , no tempo  $t_b$ , estar no intervalo  $\Delta_b$ , seguindo a preparação do estado dada por  $\rho$ . Esse cálculo é possível, no caso geral para  $\Delta_a$  e  $\Delta_b$  arbitrários se, e somente se,  $R$  e  $S$  comutam.

O último fator da equação (9.26) é:

$$Prob(B|A\&C) \equiv Prob\{(S \in \Delta_b)|(R \in \Delta_a)\&\rho\}. \quad (9.31)$$

Até aqui só havíamos considerado probabilidades condicionadas a uma preparação de estado. Para lidar com esta nova situação, temos duas possibilidades: a primeira é considerar que conhecemos os dois outros termos na equação (9.26), e utilizamos esta equação para determinar  $Prob(B|A\&C)$ ; outra possibilidade é considerar que o estado inicial  $\rho$  submetido à medida de  $R$  gera um novo estado  $\rho'$ . Medidas tipo filtragem são um exemplo, como discutiremos a seguir.

Considerarmos que a medida  $S$  será realizada apenas no subespaço de  $\rho$  para o qual  $R \in \Delta_a$ . Um exemplo seriam medidas de spin em apenas um dos feixes filtrados por um aparato de Stern-Gerlach. Isso equivale a medir  $S$  em um novo estado representado por:

$$\rho' = \frac{M_R(\Delta_a)\rho M_R(\Delta_a)}{Tr\{M_R(\Delta_a)\rho M_R(\Delta_a)\}}, \quad (9.32)$$

e a probabilidade condicional pode ser calculada da seguinte forma:

$$Prob(B|A\&\rho) \equiv Prob\{(S \in \Delta_b)|(R \in \Delta_a)\&\rho\} \quad (9.33)$$

$$= Prob\{(S \in \Delta_b)|\rho'\} = Tr\{\rho' M_S(\Delta_b)\}. \quad (9.34)$$

Agora estamos em condições de calcular a probabilidade conjunta de duas medidas de filtragem. Para isso substituímos as equações (9.29) e (9.34) em (9.26) para obter:

$$\begin{aligned} Prob(A\&B|C) &= Prob(A|C)Prob(B|A\&C) \\ &= Tr\{\rho M_R(\Delta_a)\}Tr\{\rho' M_S(\Delta_b)\} \\ &= Tr\{\rho M_R(\Delta_a)M_S(\Delta_b)M_R(\Delta_a)\}. \end{aligned} \quad (9.35)$$

O último passo da equação (9.35) é dado considerando que  $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ ,  $Tr(ABC) = Tr(BCA)$  e que para projetores  $P = P^2$ .

Se, adicionalmente,  $M_S(\Delta_b)$  e  $M_R(\Delta_a)$  comutam, encontramos:

$$Prob(A\&B|C) = Tr\{\rho M_R(\Delta_a)M_S(\Delta_b)\}, \quad (9.36)$$

que é um resultado já conhecido para operadores comutantes e comprova a consistência da teoria da probabilidade na mecânica quântica. Apesar de ser um resultado trivial, reforçamos que ele só vale se, e somente se,  $R$  e  $S$  comutam.

### Exemplo 19 (Aplicação à medidas/filtragens sucessivas de spins)

Considere que um sistema de spin  $s = 1/2$  representado por  $|\psi\rangle$  é preparado (ver §7.4). Ele é submetido a três medidas sucessivas de filtragem: uma medida de  $\sigma_z$  no tempo  $t_1$ , uma medida de  $\sigma_u$  no tempo  $t_2$  e uma medida de  $\sigma_x$  no tempo  $t_3$ . As medidas dividirão o feixe original em 8 feixes separados.

Cada um dos resultados do experimento corresponde a combinações particulares dos resultados  $+1$  ou  $-1$  para as três medidas e a probabilidade desses vários resultados é a **probabilidade conjunta** dos resultados das três medidas. A notação para essa probabilidade será  $Prob(\sigma_z = a, \sigma_u = b, \sigma_x = c|\psi\&X)$ . Temos  $a = b = c = \pm 1$ , e a probabilidade é condicional em relação tanto à preparação do estado  $\psi$  quanto à estruturação do experimento (denotado por  $X$ ), que neste caso são os sete aparatos de Stern-Gerlach utilizados nas medidas. Os feixes não se combinam e, por simplicidade, podemos desconsiderar fases relativas e coerência entre eles.

O estado inicial é  $|\psi\rangle = \alpha|z+\rangle + \beta|z-\rangle$  em termos da base formada pelos autovetores de  $\sigma_z$ . Fazendo a medida de  $\sigma_z$  no tempo  $t_1$  encontramos:

$$P_z(a|\psi\&X) = |M_z(a)|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|M_z(a)|\psi\rangle = \begin{cases} |\alpha|^2, & \text{para } a = +1, \\ |\beta|^2, & \text{para } a = -1. \end{cases} \quad (9.37)$$

Os operadores projeção são dados por:  $M_z(+1) = |z+\rangle\langle z+|$  e  $M_z(-1) = |z-\rangle\langle z-|$ . Após a medida de  $\sigma_u$  no tempo  $t_2$  teremos:

$$P_{zu}(a, b|\psi\&X) = |M_u(b)M_z(a)|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|M_z(a)M_u(b)M_z(a)|\psi\rangle, \quad (9.38)$$

onde  $M_u(b)$  é um projetor no autovetor de  $\sigma_u$ :

$$M_u(+1) = |u+\rangle\langle u+|, \quad M_u(-1) = |u-\rangle\langle u-|, \quad (9.39)$$

cujos autovetores são dados por:

$$|u+\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|z+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|z-\rangle, \quad (9.40)$$

$$|u-\rangle = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|z+\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|z-\rangle. \quad (9.41)$$

Por fim, após a medida de  $\sigma_x$  no tempo  $t_3$  teremos:

$$\begin{aligned} Prob(a, b, c|\psi \& X) &= |M_x(c)M_u(b)M_z(a)|\psi\rangle|^2 \\ &= \langle\psi|M_z(a)M_u(b)M_u(b)M_z(a)|\psi\rangle, \end{aligned} \quad (9.42)$$

sendo que  $M_x(c)$  é um operador projeção no autovetor de  $\sigma_x$ .

Notemos que medidas de  $\sigma_z$  e de  $\sigma_u$  não são afetadas por possíveis medidas futuras de  $\sigma_x$ . Formalmente  $M_x(+1) + M_x(-1) = 1$  e teremos:

$$\begin{aligned} P_{zu}(a, b|\psi \& X) &= \sum_{c=\pm 1} P(a, b, c|\psi \& X) \\ &= \sum_{c=\pm 1} \langle\psi|M_z(a)M_u(b)M_x(c)M_u(b)M_z(a)|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|M_z(a)M_u(b)M_z(a)|\psi\rangle = P_{zu}(a, b|\psi). \end{aligned} \quad (9.43)$$

Similarmente teremos que  $\sigma_z$  não depende de  $\sigma_u$  e  $\sigma_x$ :

$$\begin{aligned} P_z(a|\psi \& X) &= \sum_{b=\pm 1} \sum_{c=\pm 1} \langle\psi|M_z(a)M_u(b)M_x(c)M_u(b)M_z(a)|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|M_z(a)|\psi\rangle = P_z(a|\psi). \end{aligned} \quad (9.44)$$

Diversas probabilidades condicionais podem ser calculadas a partir dessas distribuições de probabilidade conjuntas e usando a fórmula geral  $Prob(B|A \& C) = \frac{Prob(A \& B|C)}{Prob(A|C)}$ , equação (9.26). Vejamos mais alguns exemplos a seguir.

### Exemplo 20 (Condicionando a uma medida anterior)

Seja  $C$  a preparação de um estado  $\psi$ ,  $A$  o resultado  $\sigma_z = +1$  para a primeira medida e  $B$  o resultado de uma medida de  $\sigma_u$ . A probabilidade da segunda medida fornecer  $\sigma_u = +1$ , condicionada à preparação do estado  $\psi$  e ao resultado  $\sigma_z = +1$  na primeira medida será:

$$\begin{aligned} Prob\{\sigma_u = +1 | (\sigma_z = +1) \& \psi\} &= \frac{P_{zu}(+1, +1|\psi)}{P_z(+1|\psi)} \\ &= \frac{|\alpha \cos(\theta/2)|^2}{|\alpha|^2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (9.45)$$

**Exemplo 21 (Distribuição de probabilidade para  $\sigma_x$  independente)**

A probabilidade de obter o resultado  $\sigma_x = +1$  na medida final, independentemente de resultados das medidas anteriores, é:

$$P_x(+1|\psi \& X) = \sum_a \sum_b P(a, b, +1|\psi \& X). \quad (9.46)$$

Usando a Eq.(9.42) encontramos:

$$P(+1, +1, +1|\psi \& X) = |\alpha|^2 \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 \frac{1}{2}(1 + \sin \theta), \quad (9.47)$$

$$P(-1, +1, +1|\psi \& X) = |\beta|^2 \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 \frac{1}{2}(1 + \sin \theta), \quad (9.48)$$

$$P(+1, -1, +1|\psi \& X) = |\alpha|^2 \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 \frac{1}{2}(1 - \sin \theta), \quad (9.49)$$

$$P(-1, -1, +1|\psi \& X) = |\beta|^2 \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 \frac{1}{2}(1 - \sin \theta). \quad (9.50)$$

Somando tudo temos:

$$P_x(+1|\psi \& X) = \frac{1}{2} \left[ 1 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \sin \theta \cos \theta \right]. \quad (9.51)$$

Essa é a probabilidade de se obter o resultado  $\sigma_x = +1$  com os filtros de  $\sigma_z$  e  $\sigma_u$  no seu lugar, mas ignorando os resultados de suas medidas. Isso é diferente de obter  $\sigma_x = +1$  na ausência dos dois filtros, que é dada por:

$$P_x(+1|\psi) = \langle \psi | M_x(+1) | \psi \rangle = \frac{1}{2} |\alpha + \beta|^2. \quad (9.52)$$

**Exemplo 22 (Condicionamento anterior e posterior)**

Podemos calcular a probabilidade de um resultado particular de uma medida intermediária  $\sigma_u$ , condicionada em resultados específicos de medidas anteriores (uma medida de  $\sigma_z$ ) e posteriores (uma medida de  $\sigma_x$ ). A probabilidade será:

$$Prob\{(\sigma_u = +1) | (\sigma_z = +1) \& (\sigma_x = +1) \& \psi \& X\} = \frac{P(+1, +1, +1|\psi \& X)}{P_{zx}(+1, +1|\psi \& X)}, \quad (9.53)$$

que pode ser reescrita como:

$$Prob\{(\sigma_u = +1)|(\sigma_z = +1)\&(\sigma_x = +1)\&\psi\&X\} = \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 \frac{1 + \sin \theta}{1 + \sin \theta \cos \theta}, \quad (9.54)$$

que está em franco desacordo com o exemplo 20. A dependência dos ângulos, que pode gerar probabilidades irreais (iguais a 1 tanto para  $\theta = 0$  quanto para  $\theta = \pi/2$ ), ocorre por causa da necessidade de se considerar apropriadamente a preparação dos estados implementada aqui pelo aparato de medição  $X$ .

## 9.6 Exercícios

**Exercício 9.1** *No exemplo discutido em §9.3.4, demonstre que para  $\rho^{inc}$ ,  $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_z \rangle = 0$ , e que para  $\rho^{coe}$ ,  $\langle \sigma_z \rangle = 0$  e  $\langle \sigma_x \rangle = \cos(\alpha - \beta)$ .*

**Exercício 9.2** *Demonstre a equação (9.35).*

**Exercício 9.3** *Resolva os exercícios do livro do Ballentine [2].*

