

Capítulo 7

Momento angular

7.1 Autovalores e elementos de matriz

Relembrando o capítulo 3 temos as relações de comutação para o momento angular:

$$[J_i, J_k] = i\hbar\epsilon_{ikl}J_l, \quad (7.1)$$

com: $J_i^\dagger = J_i$.

Essas relações são suficientes para definir o espectro de autovalores para esses operadores. Através de uma analogia clássica somos motivados a seguinte definição:

Definição: $J^2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$.

É possível mostrar que J^2 comuta com as componentes de \mathbf{J} :

$$[J^2, \mathbf{J}] = 0. \quad (7.2)$$

Pelo teorema 7 é possível construir uma base de autovetores que diagonaliza uma das componentes de \mathbf{J} e J^2 simultaneamente. Escolhemos a componente J_z (poderia ser qualquer outra) e supomos que esse autovetor pode ser representado por $|\beta, m\rangle$. Então supomos que:

$$J^2|\beta, m\rangle = \hbar^2\beta|\beta, m\rangle, \quad J_z|\beta, m\rangle = \hbar m|\beta, m\rangle, \quad (7.3)$$

mas, por outro lado,

$$\langle\beta, m|J^2|\beta, m\rangle = \langle\beta, m|J_x^2|\beta, m\rangle + \langle\beta, m|J_y^2|\beta, m\rangle + \langle\beta, m|J_z^2|\beta, m\rangle, \quad (7.4)$$

o produto interno de um vetor com ele mesmo não pode ser negativo, logo:

$$\langle\beta, m|J_i^2|\beta, m\rangle \geq 0, \quad (7.5)$$

e como $\langle \beta, m | J_z^2 | \beta, m \rangle \geq \hbar^2 m^2$ a equação (7.4) se torna a desigualdade

$$\hbar^2 \beta \geq 0 + 0 + \hbar^2 m^2 \quad \Rightarrow \quad \beta \geq m^2, \quad (7.6)$$

para um dado β existe um valor mínimo e máximo para m . Nesse momento introduzimos dois operadores (similarmente aos operadores criação e destruição do capítulo 6) para facilitar os cálculos:

$$J_+ = J_x + iJ_y, \quad J_- = J_x - iJ_y, \quad (7.7)$$

que satisfazem as relações de comutação:

$$[J_z, J_+] = \hbar J_+, \quad [J_z, J_-] = -\hbar J_-, \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z. \quad (7.8)$$

Queremos calcular quem é β e explicitar a relação (7.6). Para isso calculemos:

$$\begin{aligned} J_z J_+ |\beta, m\rangle &= (J_+ J_z + \hbar J_+) |\beta, m\rangle = J_+ J_z |\beta, m\rangle + \hbar J_+ |\beta, m\rangle \\ &= J_+ \hbar m |\beta, m\rangle + \hbar J_+ |\beta, m\rangle = \hbar(m+1) J_+ |\beta, m\rangle, \end{aligned} \quad (7.9)$$

logo $J_+ |\beta, m\rangle$ é autovetor de J_z com autovalor $\hbar(m+1)$. Como existe um valor máximo para m vamos supor que esse valor máximo é j de tal forma que:

$$J_+ |\beta, j\rangle = 0, \quad (7.10)$$

pois não pode existir o autovalor $\hbar(j+1)$. Com esse resultado podemos escrever:

$$J_- J_+ |\beta, j\rangle = 0, \quad (7.11)$$

mas

$$J_- J_+ = (J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y) = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z, \quad (7.12)$$

em que usamos as relações de comutação para J_x e J_y . Com esse resultado e a equação (7.11) encontramos:

$$J_- J_+ |\beta, j\rangle = J^2 |\beta, j\rangle - J_z^2 |\beta, j\rangle - \hbar J_z |\beta, j\rangle, \quad (7.13)$$

daí encontramos:

$$0 = \hbar^2 \beta - \hbar^2 j - \hbar^2 j \quad \Rightarrow \quad \beta = j(j+1). \quad (7.14)$$

Podemos repetir o mesmo processo de antes, usando $J_z J_- |\beta, j\rangle$, para mostrar que $J_- |\beta, j\rangle$ é autovetor de J_z com autovalor $\hbar(m-1)$. Adicionalmente deve valer que $J_- |\beta, k\rangle = 0$ pois k é o menor valor admissível para m .

A partir de $J_+J_-|\beta, k\rangle = 0$ de forma similar ao que fizemos antes é possível mostrar que:

$$k = -j, \quad (7.15)$$

daí encontramos o importante resultado:

$$-j \geq m \geq j. \quad (7.16)$$

Como m cresce como um número inteiro então j deve ser um número semi-inteiro. A tabela abaixo mostra os valores permitidos de m para cada um dos possíveis valores de j :

j	m
0	0
1/2	-1/2 e 1/2
1	-1, 0 e 1
3/2	-3/2, -1/2, 1/2 e 3/2

Tabela 7.1: Tabela com os possíveis valores de m associado aos valores de j .

A partir de agora, por uma questão de tradição de notação em mecânica quântica, abandonaremos a notação $|\beta, m\rangle$ para representar o autovetor comum de J^2 e J_z e usaremos a notação usual $|j, m\rangle$. As relações de autovalores para J^2 , J_+ e J_- agora podem ser reescritas como sendo:

$$J^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle, \quad (7.17)$$

$$J_+|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j, m+1\rangle \quad (7.18)$$

$$J_-|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle \quad (7.19)$$

É possível construir representações matriciais para os operadores momento angular. J_z é diagonal, pois $\langle j', m'|J_z|j, m\rangle = \hbar m\delta_{jj'}\delta_{mm'}$. Já $\langle j', m'|\mathbf{J}|j, m\rangle$ tem que ser nulo para qualquer $j' \neq j$, logo também é diagonal. A partir da equação (7.18) podemos obter a representação matricial de $\langle j', m'|J_+|j, m\rangle$ que apresentamos a seguir:

	$m = 0; \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}; 1, \quad 0, -1; \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$	
$j' = 0, m' = 0$	0	
$j' = \frac{1}{2}, m' = \frac{1}{2}$	0	1
$\quad \quad \quad -\frac{1}{2}$	0	0
$j' = 1, m' = 1$		0
$\quad \quad \quad 0$		$\sqrt{2}$
$\quad \quad \quad -1$		0
$j' = \frac{3}{2}, m' = \frac{3}{2}$		0
$\quad \quad \quad \frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$
$\quad \quad \quad -\frac{1}{2}$		0
$\quad \quad \quad -\frac{3}{2}$		0

Figura 7.1: Elementos de matriz do operador momento angular para valores de m e j . Extraído de [2].

De forma análoga podemos proceder para J_- . As representações matriciais de J_x e J_y podem ser obtidas a partir de:

$$J_x = \frac{J_+ + J_-}{2}, \quad J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}. \quad (7.20)$$

7.2 Forma explícita dos operadores de momento angular

Conforme vimos no capítulo 3 o operador momento angular está associado a rotações de um ângulo θ na direção \hat{n} :

$$R_n(\theta) = e^{i\theta\hat{n}\cdot\mathbf{J}/\hbar}. \quad (7.21)$$

Caso 1) Função de estado de uma componente

Suponha que exista uma função de estado que depende apenas de uma componente. A atuação de R nessa função $\psi(\mathbf{x})$ é dada por:

$$R\psi(\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}), \quad (7.22)$$

considerando rotações infinitesimais em torno de z :

$$R_z(\epsilon)\psi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\sin \epsilon & 0 \\ \sin \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

vai nos dar a função $\psi(x \cos \epsilon + y \sin \epsilon, -x \sin \epsilon + y \cos \epsilon, z)$. Expandindo essa função em séries de potências:

$$R_z(\epsilon)\psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) + \epsilon \left(y \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (7.24)$$

também expandindo o operador:

$$R_z(\epsilon) = \mathbf{1} + \frac{i\epsilon J_z}{\hbar}, \quad (7.25)$$

e como ψ é uma função arbitrária encontramos:

$$\frac{i\epsilon J_z}{\hbar} = \epsilon \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \Rightarrow J_z = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (7.26)$$

que não é senão a componente z de um produto vetorial. Repetindo esse procedimento para J_x e J_y podemos mostrar que:

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q} \times \mathbf{P}, \quad (7.27)$$

exatamente como na mecânica clássica. Num sistema cuja função de estado possui apenas 1 componente estamos desconsiderando qualquer outra forma de momento angular e, portanto, nossa discussão para \mathbf{J} é idêntica para \mathbf{L} . Para sistemas mais complicados, como veremos a seguir, $\mathbf{J} \neq \mathbf{L}$.

Caso 2) Função de estado de múltiplas componentes

Para estados multicomponentes não vale mais a identificação $\mathbf{J} = \mathbf{L}$ pois existem outras formas de momento angular. Pode existir um grau de liberdade interno chamado de **momento angular de spin**, denotado pelo operador \mathbf{S} , que possui as mesmas características do operador \mathbf{L} e, portanto, deve ser adicionado a este para compor \mathbf{J} . Por essa razão damos o nome para \mathbf{J} de momento angular total e para \mathbf{L} o nome de momento angular orbital. Assim, nesse caso

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (7.28)$$

Veremos em mais detalhes o momento angular orbital, momento angular de spin e a forma como somar essas grandezas nas seções que seguem.

7.3 Momento angular orbital

Conforme comentamos na seção anterior o momento angular quântico se escreve igualmente ao momento angular clássico com a substituição da função posição pelo operador posição e substituindo a função momento linear pelo operador momento linear.

Em coordenadas esféricas podemos representar \mathbf{P} na representação das coordenadas de modo a poder escrever:

$$\mathbf{L} = -i\hbar \left[\hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]. \quad (7.29)$$

Assim sendo, na representação das coordenadas, escrevemos:

$$L_z = \hat{e}_z \cdot \mathbf{L} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (7.30)$$

$$L^2 = \hbar \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (7.31)$$

A equação de autovalores para L_z e L^2 na representação das coordenadas envolve uma função especial conhecida como **harmônicos esféricos** (geralmente construídos como uma solução da parte angular da equação de Laplace em coordenadas esféricas). Sobre mais detalhes dessas funções especiais recomendamos [26, 27].

As funções harmônicos esféricos são denotados por $Y_l^m(\theta, \varphi)$ e para o operador momento angular orbital satisfazem:

$$L_z Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar m Y_l^m(\theta, \varphi), \quad L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (7.32)$$

note que $Y_l^m(\theta, \varphi)$ são autofunções (autovetores num espaço de dimensão infinita) do operador momento angular e da sua projeção no eixo z .

No tratamento de representação das coordenadas as restrições que impusemos anteriormente para os possíveis valores de β são obtidas a partir de condições de contorno para a solução da equação de autovalores em coordenadas esféricas. Essas condições de contorno em geral oriundas da mecânica clássica e assumidas como importantes são desnecessárias na mecânica quântica. Isto porque não faz sentido falar de condições de contorno para ψ mas sim para seus valores médios.

7.4 Spin

Spin é um operador, denotado por \mathbf{S} , que satisfaz as mesmas relações de comutação do operador momento angular:

$$[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k, \quad (7.33)$$

e assim como anteriormente:

$$S^2 |s, m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m\rangle, \quad S_z |s, m\rangle = \hbar m |s, m\rangle, \quad (7.34)$$

com a condição $-s \geq m \geq s$.

Caso 1) $s = 1/2$

Consideremos partículas de spin semi-inteiro chamadas de **férmions** (mais pra frente veremos o por quê do nome). Nesse caso a representação do operador de spin é de matrizes 2×2 conhecidas como **matrizes de Pauli**. Essas matrizes são:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.35)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.36)$$

Essas matrizes possuem autovalores iguais a ± 1 , traço nulo, determinante unitário e satisfazem as mesmas relações de comutação do operador momento angular. Por isso definimos:

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i, \quad (7.37)$$

geralmente define-se $\sigma_0 = \mathbf{1}$, a matriz identidade, para que o conjunto das quatro matrizes σ_i , de $i = 1$ até 4, formem uma base completa ortonormal para o espaço de matrizes 2×2 (mais especificamente, são os geradores do grupo $SU(2)$, o grupo das rotações unitárias em duas dimensões).

Um sistema de spin-1/2 tem como operador densidade a seguinte expressão:

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z), \quad (7.38)$$

o fator $1/2$ é necessário para que $Tr(\rho) = 1$ e o termo \mathbf{a} tem que ser real para que possamos garantir hermiticidade. Para entendermos melhor o significado de \mathbf{a} calculemos:

$$\langle \sigma_x \rangle = Tr(\rho \sigma_x) = \frac{1}{2} Tr(\sigma_x + a_x \sigma_x \sigma_x + a_y \sigma_y \sigma_x + a_z \sigma_z \sigma_x) = a_x, \quad (7.39)$$

em que usamos relações de comutação para as matrizes de Pauli e o traço nulo. Esse resultado é válido para qualquer uma das componentes, logo:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{a}, \quad (7.40)$$

o vetor \mathbf{a} é usualmente chamado de **vetor de polarização**. Como os autovalores de $\boldsymbol{\sigma}$ os autovalores de ρ são conhecidos e dados por:

$$\lambda_\rho = \frac{1}{2}(1 \pm |\mathbf{a}|), \quad (7.41)$$

em que usamos λ_ρ para denotar os autovalores do operador ρ . Como ρ não pode ser negativo, temos que: $0 \geq |\mathbf{a}| \geq 1$. O estado $|\mathbf{a}| = 1$ é conhecido como estado polarizado, correspondendo a polarização máxima dos sistema. O estado $|\mathbf{a}| = 0$ é não-polarizado.

Uma única partícula de spin-1/2 (um elétron, por exemplo) é um exemplo simples de um **qubit**, a unidade básica de computação quântica. Um bit clássico possui 2 estados possíveis, zero ou um. Um bit quântico (qubit) possui 3 estados possíveis; zero, um e uma superposição destes. Já dois qubits tem 15 estados possíveis; $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$, $|00\rangle + |01\rangle$, $|00\rangle + |10\rangle$, $|00\rangle + |11\rangle$, $|01\rangle + |10\rangle$, $|10\rangle + |11\rangle$, $|01\rangle + |11\rangle$, $|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle$, $|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle$, $|01\rangle + |10\rangle + |11\rangle$, $|00\rangle + |10\rangle + |11\rangle$, $|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle$.

Esse pequeno exemplo mostra o poder da computação quântica frente a computação clássica. Veremos mais detalhes sobre isso no último capítulo do livro ou, para os mais curiosos, em [5].

Caso 2) $s = 1$

Nesse caso temos partículas de spin inteiro, chamadas de **bósons** (como antes, veremos mais a frente o porquê deste nome).

Agora as matrizes de spin não podem mais ser representadas pelas matrizes de Pauli. Inclusive, nesse caso, as matrizes são 3x3:

$$S_x = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.42)$$

nesse caso não podemos mais dizer que o vetor polarização é um autovetor da componente do spin na mesma direção. Com a restrição $Tr(\rho) = 1$ o operador de estado ρ possui oito componentes enquanto $\langle \mathbf{S} \rangle$ garante apenas três. Veremos mais sobre isso e como resolver esse problema no próximo capítulo.

Por fim sistemas de spin maiores $s = 3/2$, $s = 2$ etc necessitarão de matrizes maiores ($4x4$, $5x5$ e assim sucessivamente) aumentando o número de parâmetros necessários para descrever o operador de sistema. Outra complicação adicional é que as componentes de S^2 não comutam mais, de forma a não existir uma base comum entre eles. Essas são dificuldades adicionais quando estamos tratando sistemas de spin diferente de 1 ou de 1/2, que são os casos mais simples.

7.5 Rotações finitas

A teoria de grupos tem um forte resultado matemático conhecido como **teorema da ortogonalidade de representações** que diz que o produto

de representações pertencentes a representações irredutíveis distintas é nulo.

Esse teorema pode ser transportado para a discussão de momento angular (afinal de contas, o que está por trás da teoria de momento angular da M.Q. é teoria de grupos e teoria de representação de grupos) para entendermos que rotações não misturam os números quânticos j diferentes. Sobre esse teorema e diversos assuntos de teoria de grupos referenciamos o livro de teoria de grupos do prof. Filardo Bassalo [28] enquanto que para aplicações interessantes de teoria de grupos referenciamos [3].

Denotando as rotações finitas por $R(\alpha, \beta, \gamma)$ temos que a aplicação desse operador no ket $|j, m\rangle$ resulta em:

$$R(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle = \sum_{m'} |j', m'\rangle D_{m, m'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (7.43)$$

com:

$$D_{m, m'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(\alpha m' + \gamma m)} \langle j, m' | e^{-i\beta J_y} | j, m \rangle, \quad (7.44)$$

o operador de rotação pode ser descrito em três rotações sucessivas através dos **ângulos de Euler**:

$$R(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}, \quad (7.45)$$

se estamos considerando spin semi-inteiro, $j = 1/2$, então $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ daí:

$$\langle 1/2, m' | e^{-i\beta \sigma_y/2} | j, m \rangle = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}, \quad (7.46)$$

que possui período 4π . No caso de spin inteiro $j = 1$ teremos período 2π . Note que a expressão acima corresponde à representação $D_{m, m'}^{(1/2)}(0, \beta, 0)$. É possível usar essa notação para escrever os harmônicos esféricos em termos dessa representação:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} [D_{m, 0}^{(l)}(\theta, \varphi, 0)]^*. \quad (7.47)$$

7.6 Rotações de 2π

Estamos interessados em analisar rotações finitas de 2π . O operador de rotações de um ângulo θ na direção \hat{n} , como já comentamos, é: $R_n(\theta) = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \mathbf{J}/\hbar}$. A atuação desse operador num ket de momento angular é:

$$R_n(2\pi)|j, m\rangle = (-1)^{2j}|j, m\rangle, \quad (7.48)$$

como os valores esperados são independentes da escolha do referencial (do contrário teríamos uma física diferente em cada referencial) e também da consideração que rotações não misturam j encontramos:

$$R_n(2\pi) = R(2\pi), \quad (7.49)$$

em geral a maioria dos observáveis físicos, denotados genericamente por A , são invariantes para rotações de 2π . Isso significa que:

$$R(2\pi)AR(2\pi)^{-1} = A, \quad \Rightarrow \quad [R(2\pi), A] = 0. \quad (7.50)$$

Genericamente um operador unitário U que deixa um observável A invariante $[U, A] = 0$ implica que os valores esperados em referenciais diferentes conduzidos pelo operador U são idênticos. Para mostrar isso, note que:

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \neq |\psi\rangle, \quad (7.51)$$

mas:

$$\langle A \rangle' = \langle \psi' | A | \psi' \rangle = \langle \psi | U^\dagger A U | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \langle A \rangle. \quad (7.52)$$

O mesmo resultado vale para um operador de estado geral ρ que é invariante por U :

$$\rho' = U\rho U^\dagger \quad \Rightarrow \quad \langle A \rangle' = \langle A \rangle, \quad (7.53)$$

a única diferença do caso anterior é que teremos que usar o traço $\langle A \rangle = Tr(\rho A)$ para provar isso.

O operador $R(2\pi)$ divide o espaço vetorial em 2 subespaços:

$$|+\rangle \rightarrow R(2\pi)|+\rangle = |+\rangle, \quad j \text{ inteiro}, \quad (7.54)$$

$$|-\rangle \rightarrow R(2\pi)|-\rangle = -|-\rangle, \quad j \text{ semi-inteiro}. \quad (7.55)$$

Consideremos um observável A invariante por $R(2\pi)$ e com isso podemos escrever:

$$\langle + | R(2\pi) A | - \rangle = \langle + | A R(2\pi) | - \rangle, \quad (7.56)$$

pois A comuta com $R(2\pi)$. Isso implica em:

$$\langle + | A | - \rangle = -\langle + | A | - \rangle, \quad (7.57)$$

o que é válido se, e somente se,

$$\langle + | A | - \rangle = 0, \quad (7.58)$$

esse pequeno cálculo que fizemos nos mostra um importante resultado:

Super regra de seleção: Nenhum estado físico pode ter termos que misturam j inteiro com j semi-inteiro.

Disso podemos tirar a importante conclusão que toda operação de simetria leva a uma regra de seleção com a conservação do número quântico associado.

7.7 Adição de momento angular

Considere um sistema de duas componentes com momento angular. Denotaremos a partícula 1 com momento angular $J^{(1)}$ e a partícula 2 com momento angular $J^{(2)}$. Poderíamos pensar, também, em adição de \mathbf{L} com \mathbf{S} de uma mesma partícula (num fenômeno chamado acoplamento spin-órbita, que será visto mais adiante).

O ket que é autovetor de ambos operadores é denotado por:

$$|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle^{(1)} \otimes |j_2, m_2\rangle^{(2)}, \quad (7.59)$$

tais que:

$$[J^{(1)}]^2 |j_1, m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1 + 1) |j_1, m_1\rangle, \quad J_z^{(1)} |j_1, m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1, m_1\rangle, \quad (7.60)$$

$$[J^{(2)}]^2 |j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2 + 1) |j_2, m_2\rangle, \quad J_z^{(2)} |j_2, m_2\rangle = \hbar m_2 |j_2, m_2\rangle. \quad (7.61)$$

Quando o sistema como um todo é invariante a rotações as constantes de movimento não são $J^{(1)}$ ou $J^{(2)}$ mas, sim:

$$\mathbf{J} = J^{(1)} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes J^{(2)}, \quad (7.62)$$

os autovetores de \mathbf{J} (o operador resultado da soma de dois momentos angulares) é denotado por $|j_1, j_2, J, M\rangle$, também chamados de autovetores do operador momento angular total.

Assim, fica a importante pergunta: como conectar os autovetores dos operadores individuais $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$ com os autovetores do operador momento angular total $|j_1, j_2; J, M\rangle$?

A resposta é através dos **coeficientes de Clebsh-Gordon**. É possível expressar a base $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$ em termos de $|j_1, j_2; J, M\rangle$ usando:

$$|j_1, j_2; J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle, \quad (7.63)$$

os coeficientes dessa transformação são os chamados **coeficientes de Clebsh-Gordon**:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle = \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; J, M\rangle. \quad (7.64)$$

Esses coeficientes, com a escolha apropriada de uma fase, são únicos e a transformação conduzida por eles é unitária de tal forma que eles satisfazem relações de ortogonalidade. Além disso eles não são nulos exceto nos casos:

- $m_1 + m_2 = M$

- $|j_1 - j_2| \geq J \geq j_1 + j_2$
- $j_1 + j_2 = J = \text{um inteiro}$

Em geral obtêm-se os coeficientes de Clebsh-Gordon fixando-se o maior valor possível para M no sistema em estudo e ir baixando os números quânticos através do operador \mathbf{J}_- . Para a maioria dos sistemas de interesse físico esses coeficientes são tabelados.

7.8 Rotação de corpo rígido

O hamiltoniano de um corpo rígido em rotação (rotor rígido) é dado por:

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{J_a^2}{I_a} + \frac{J_b^2}{I_b} + \frac{J_c^2}{I_c} \right], \quad (7.65)$$

sendo I_a o momento de inércia do rotor rígido em relação ao eixo principal a e temos $J_\alpha = \mathbf{J} \cdot \vec{\alpha}$, com $\vec{\alpha}$ uma variável dinâmica do rotor rígido equivalente ao operador posição para partículas.

Nesse caso a relação de comutação é ligeiramente diferente da usual:

$$[J_a, J_b] = -i\hbar J_c, \quad (7.66)$$

se o momento de inércia de todos os eixos for igual $I_a = I_b = I_c = I$ damos o nome de rotor rígido esférico e temos que:

$$H = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}{2I}, \quad (7.67)$$

cujos autovalores são $E_j = \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2I}$. Nesse caso a degenerescência passa a ser de $(2j + 1)^2$ e não mais $(2j + 1)$.

7.9 Teoria de grupos e momento angular

O leitor atento deve ter percebido que a teoria de momento angular é baseada em uma álgebra um pouco diferente da que estamos acostumados. Para citar um exemplo, a operação $L_x L_y$ num dado estado físico $|\psi\rangle$ é diferente da operação $L_y L_x$ atuando no mesmo estado físico.

Claro que isso é devido às relações de comutação satisfeitas pelo operador \mathbf{L} . Porém note que as componentes de \mathbf{L} não comutam entre si, embora comutem

com L^2 . Essa estranheza do operador momento angular é consequência desse operador estar inserido em um contexto mais geral de teoria de grupos.

A matemática por trás da teoria de momento angular é muito bem sedimentada e está cada vez mais presente em física, principalmente em modelos sofisticados de física de partículas. Por conta da beleza dessa teoria dedicaremos essa seção para apresentar novos conceitos em teoria de grupos e estabelecer a relação desses conceitos com as ideias de momento angular em mecânica quântica.

7.9.1 O grupo $SU(2)$

Conforme comentamos no apêndice C um grupo é definido como um conjunto de objetos dotado de uma operação de multiplicação entre os elementos desse grupo que satisfazem certas propriedades (citar algum livro).

Considere o conjunto de todas as matrizes de entradas complexas, unitárias, de dimensão 2 e determinante 1. Ou seja, são matrizes que satisfazem:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \right\} \quad (7.68)$$

Por conta de sua estrutura, esse grupo é chamado **grupo especial unitário**. Esse grupo é de tamanha importância em física pois serve para representar sistemas de dois níveis de spin. Note que todas as matrizes de Pauli, σ_i , pertencem a esse grupo.

Isso significa, então, que é possível descrever operações de spin através de operações em um grupo, algo que é fácil de ser feito e é bem estabelecido na literatura matemática (citar livro de novo).

7.9.2 O grupo $SO(3)$

O próximo grupo que gostaríamos de comentar consiste no grupo $SO(3)$, também chamado de grupo das rotações do espaço tridimensional.

Já comentamos dele no cap 3: não é nada mais que o grupo que corresponde a todas as rotações no espaço tridimensional. O gerador dessas rotações é o momento angular, conforme já comentamos.

7.9.3 Grupos de Lie

Os dois grupos anteriores que comentamos são grupos que pertencem a uma classe especial, chamados de **grupos de Lie**.

Esses grupos possuem uma estrutura de continuidade para todas as operações de multiplicação do grupo. Em outras palavras, é um grupo contínuo em que um de seus elementos é descrito por um conjunto de parâmetros reais.

Relembrando o grupo de Galileu que estudamos no capítulo 3 vemos que todos os elementos ali estão associados a parâmetros reais (tempo, posição, ângulos) consistindo, portanto, em grupos de Lie.

A importância dos grupos de Lie em física é simplesmente vasta e não se restringe apenas à mecânica quântica (citar fonte).

7.9.4 Álgebras de Lie

A grande vantagem de se conhecer que uma dada teoria física é descrita por um grupo de Lie consiste em que eles satisfazem uma álgebra própria, chamada **álgebra de Lie**.

Para todo grupo de Lie há uma álgebra de Lie associada e ela permite simplificar a análise de sistemas físicos através das relações satisfeitas pelos geradores de simetrias do grupo de Lie subjacente. Em termos práticos uma álgebra de Lie é uma álgebra de comutadores.

7.10 Exercícios

Exercício 7.1 Prove a relação de comutação entre J^2 e \mathbf{J} , equação (7.2).

Exercício 7.2 Prove as relações de comutação da equação (7.8).

Exercício 7.3 Prove a relação da equação (7.15).

Exercício 7.4 Resolva todos os exercícios 7.4, 7.5 e 7.6 do livro do Ballentine, [2].

Exercício 7.5 O estado geral de um sistema com operador momento angular total J é $|j, m\rangle$, sendo j o número quântico azimutal associado ao operador J^2 e m o número quântico associado ao operador J_z . Seja, também, os operadores “escada”:

$$J_{\pm}|s, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\hbar|j, m \pm 1\rangle, \quad (7.69)$$

sendo que \mathbf{J} pode significar qualquer combinação linear de momentos angulares, inclusive de spin.

a) Opere a soma de momento angular para spin: $S = S^{(1)} + S^{(2)}$ para achar todos os estados possíveis ao sistema de duas partículas de spin-1/2.

b) Opere a soma de momento angular de spin-órbita: $J = L + S$ para achar todos os estados possíveis ao sistema de duas partículas, uma de momento

angular L e outra de momento angular de spin S . Comente as diferenças entre ambos sistemas.

