

Capítulo 15

Mecânica Quântica do campo eletromagnético

Nesse capítulo, desenvolveremos uma quantização do campo eletromagnético, cuja dinâmica será governada pela M.Q., assim como a dinâmica de partículas. O tratamento que daremos é adequado a aplicações em óptica quântica, por ser uma área que possui grande riqueza de experimentos mostrando as características peculiares da eletrodinâmica quântica e dos quanta de campo eletromagnético, os fótons. Existem outras abordagens, entre elas a versão manifestadamente covariante, muito usual em física de partículas. Para os interessados nessa outra versão sugerimos [42, 43].

15.1 Modos normais do campo

Considere, inicialmente, as equações de Maxwell no vácuo, na ausência de cargas e fontes de corrente:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (15.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (15.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (15.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (15.4)$$

Tomando o rotacional da primeira equação e usando a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ chegamos na equação de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (15.5)$$

e uma equação idêntica vale para \mathbf{B} . A equação de onda pode ser facilmente representada se consideramos o campo elétrico como sendo a soma de *modos de campo*, $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$, que satisfazem:

$$\nabla^2 \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) = -k_m^2 \mathbf{u}_m(\mathbf{x}), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) = 0, \quad (15.6)$$

além de satisfazer $\hat{n} \times \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) = 0$ para qualquer superfície condutora. Esse não é senão um problema de autovalores com autofunções ortogonais:

$$\int \mathbf{u}_{m'}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) d^3x = \delta_{m',m}, \quad (15.7)$$

de tal forma que esperamos que o campo elétrico seja uma soma desses modos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_m f_m(t) \mathbf{u}_m(\mathbf{x}). \quad (15.8)$$

Substituindo na equação de onda, encontramos:

$$\frac{d^2}{dt^2} f_m(t) + c^2 k_m^2 f_m(t) = 0, \quad (15.9)$$

que é uma equação de oscilador harmônico de frequência $\omega_m = ck_m$.

Já para o campo magnético usamos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sum_m h_m(t) \nabla \times \mathbf{u}_m(\mathbf{x}), \quad (15.10)$$

tal que:

$$\frac{dh_m(t)}{dt} = -cf_m(t). \quad (15.11)$$

Devido à estrutura de \mathbf{B} , a lei de Gauss está satisfeita automaticamente. Além disso, também vale que:

$$\hat{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_m) = 0, \quad (15.12)$$

em que \hat{n} é o vetor unitário normal a uma superfície condutora. Com isso a condição de contorno, $\hat{n} \cdot \mathbf{B} = 0$, também é automaticamente satisfeita. De forma análoga a Eq.(15.7), existe uma relação de ortonormalidade para os rotacionais:

$$\int (\nabla \times \mathbf{u}_{m'}) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_m) d^3x = k_m^2 \delta_{m',m}. \quad (15.13)$$

Substituindo \mathbf{E} (Eq.(15.8)) e \mathbf{B} (Eq.(15.10)) em (15.1) obtem-se:

$$\frac{df_m(t)}{dt} = -ck_m^2 h_m(t). \quad (15.14)$$

Por fim, considerando (15.9), (15.11) e (15.14), temos:

$$\frac{d^2}{dt^2}h_m(t) + c^2k_m^2h_m(t) = 0, \quad (15.15)$$

Em resumo, tanto \mathbf{E} quanto \mathbf{B} podem ser descritos por uma combinação linear de um número infinito de osciladores harmônicos. Na próxima seção veremos que escrever os campos dessa forma é muito útil na quantização do campo eletromagnético.

15.2 Operadores de campo elétrico e magnético

Seguindo uma analogia clássica, calculemos a energia total do campo eletromagnético que, em mecânica quântica, representamos como o hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H_{EM} &= \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d^3x = \frac{1}{8\pi} \int \sum_{m',m} f_{m'} f_m \int \mathbf{u}_{m'}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) d^3x \\ &+ \frac{1}{8\pi} \sum_{m',m} h_{m'} h_m \int (\nabla \times \mathbf{u}_{m'}) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_m) d^3x \\ &= \frac{1}{8\pi} \sum_m (f_m^2 + k_m^2 h_m^2). \end{aligned} \quad (15.16)$$

Na primeira passagem consideramos as definições de \mathbf{E} quanto \mathbf{B} como combinações lineares de osciladores harmônicos (Eqs. (15.8) e (15.10)), e na segunda passagem consideramos as condições de ortogonalidade entre os modos (Eqs. (15.7) e (15.13)).

O hamiltoniano de um conjunto de osciladores harmônicos, cada um com massa unitária, é:

$$H_{osc} = \sum_m \frac{1}{2} (P_m^2 + \omega_m^2 Q_m^2), \quad (15.17)$$

em que $P_m = \frac{dQ_m}{dt}$. Usando a equação (15.14), podemos eliminar os termos que dependem de $h_m(t)$ no hamiltoniano e isso nos dará um resultado idêntico à equação (15.17) com a seguinte identificação:

$$Q_m \leftrightarrow \frac{f_m}{2\omega_m\sqrt{\pi}}, \quad (15.18)$$

ou, se eliminarmos f_m em vez de h_m teremos a identificação:

$$Q_m \leftrightarrow \frac{h_m}{2c\sqrt{\pi}}. \quad (15.19)$$

A quantização do oscilador harmônico é conhecida (vide capítulo 6), e aplicaremos a mesma metodologia para quantizar o campo eletromagnético. Porém, antes de prosseguir, precisamos lidar com a ambiguidade da escolha de Q_m .

Começemos considerando o hamiltoniano de um conjunto de osciladores harmônicos descrito em segunda quantização, isto é, descrito em termos dos operadores criação e aniquilação:

$$H = \sum_m \hbar\omega_m \left(a_m^\dagger a_m + \frac{1}{2} \right), \quad (15.20)$$

em que os operadores de subida e descida satisfazem à relação de comutação (6.11):

$$[a_{m'}^\dagger, a_m] = \delta_{m',m}. \quad (15.21)$$

Temos ainda que ((6.4) e (6.9)):

$$Q_m = \left(\frac{\hbar}{2\omega_m} \right)^{1/2} (a_m^\dagger + a_m), \quad P_m = i \left(\frac{\hbar\omega_m}{2} \right)^{1/2} (a_m^\dagger - a_m), \quad (15.22)$$

e fazendo a escolha (15.18) temos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_m \sqrt{2\pi\hbar\omega_m} [a_m^\dagger(t) + a_m(t)] \mathbf{u}_m(\mathbf{x}), \quad (15.23)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sum_m ic \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_m}} [a_m^\dagger(t) - a_m(t)] \nabla \times \mathbf{u}_m(\mathbf{x}). \quad (15.24)$$

Se tivéssemos feito a escolha (15.19) teríamos obtido um resultado similar mas inverso (a expressão para \mathbf{E} seria similar a de \mathbf{B} e vice-versa).

Nessa versão que escolhemos, \mathbf{E} é análogo à \mathbf{Q}_m e \mathbf{B} é análogo à \mathbf{P}_m . As duas descrições prováveis são completamente análogas e diferem apenas de uma fase. Isto pode ser visto considerando a equação de movimento de Heisenberg (15.25):

$$\frac{da_m(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, a_m(t)] = -i\omega_m a_m(t), \quad (15.25)$$

onde consideramos a relação de comutação (6.14). A solução desta equação é $a_m(t) = a_m e^{-i\omega_m t}$. De forma similar obtem-se $a_m^\dagger(t) = a_m^\dagger e^{i\omega_m t}$. Uma equação vai na outra com um fator de $e^{i\frac{\pi}{2}}$. Como o hamiltoniano do oscilador harmônico é simétrico para P e Q , as duas analogias levam ao mesmo significado físico, que é o que nos interessa. Adotaremos a escolha que fizemos pela equação (15.18).

Como os campos elétrico e magnético são campos reais, temos a escolha natural de $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ real. Porém, é conveniente expressar os modos em termos de funções complexas (que são tratadas como sendo independente do seu complexo conjugado). Essa descrição em termos de funções complexas facilita o estudo de fenômenos de interferência e outras características do campo eletromagnético. Então, por conta disso, escrevemos o campo elétrico como sendo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_k \sqrt{2\pi\hbar\omega_k} [a_k^\dagger(t)\mathbf{e}_k^*(\mathbf{x}) + a_k(t)\mathbf{e}_k(\mathbf{x})]. \quad (15.26)$$

Como é possível calcular \mathbf{B} a partir de \mathbf{E} é mais simples trabalhar sempre com o campo elétrico e depois calcular o campo magnético, se for necessário.

Escrito dessa forma, o campo elétrico (e o campo magnético também, analogamente) são **operadores de campo**. Em outras palavras, \mathbf{E} e \mathbf{B} não são mais os campos vetoriais reais da eletrodinâmica clássica, mas operadores hermitianos quantizados.

A quantização de \mathbf{E} está expressa manifestadamente pela soma sobre osciladores harmônicos que dependem do tempo. A característica espacial do campo está associada aos modos normais. É graças a essa possibilidade de quantização do campo eletromagnético que muito pode ser feito em eletrodinâmica quântica, conforme veremos nas seções seguintes.

15.3 Energia de ponto zero

Retomando ao hamiltoniano (15.20), vemos que ele é uma soma para todos os modos do termo de energia de ponto zero $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Como existe um número infinito de modos do campo, mesmo para um volume finito, a energia de ponto zero é infinita para qualquer volume finito.

Para calcular a magnitude dessa energia de ponto zero, consideremos uma frequência de corte (*cut-off*), ω_c , e calculemos essa energia numa caixa retangular de volume $L_1L_2L_3$. As soluções para a caixa retangular serão:

$$u_x = A_1 \cos(k_1x) \sin(k_2y) \sin(k_3z), \quad (15.27)$$

$$u_y = A_2 \sin(k_1x) \cos(k_2y) \sin(k_3z), \quad (15.28)$$

$$u_z = A_3 \sin(k_1x) \sin(k_2y) \cos(k_3z), \quad (15.29)$$

com $k_1 = n_1\pi/L_1$, $k_2 = n_2\pi/L_2$ e $k_3 = n_3\pi/L_3$, em que n_1, n_2, n_3 são inteiros não negativos e $\omega_k = c\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$. Devido à condição:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (15.30)$$

vemos que existem duas direções de polarização independentes. Se as dimensões da cavidade forem grandes, os valores possíveis de \mathbf{k} se aproximam de

um contínuo e a densidade de modos no octante positivo do espaço de k é $2\Omega/\pi^3$, sendo $\Omega = L_1L_2L_3$ o volume da caixa. A densidade de energia de ponto zero para todos os modos de frequência menor do que ω_c é dado por:

$$\frac{2}{\Omega} \sum_k \frac{1}{2} \hbar \omega_c = \frac{2}{8\pi^3} \int_{k < k_c} \frac{1}{2} \hbar (ck) k^2 dk = \frac{\hbar ck_c^4}{8\pi^2}. \quad (15.31)$$

O termo de k_c^4 indica que a energia de ponto zero diverge fortemente para valores grandes de k_c , isto é, para altas frequências, ou baixos comprimentos de onda. A título de comparação, consideremos um comprimento de onda típico, o menor comprimento de onda do visível, $\lambda_c = 0,4 \times 10^{-6}$ m fornece uma densidade de energia de ponto zero igual a 23 J/m^3 . A densidade de energia a um metro de uma lâmpada de 100 W é de $2,7 \times 10^{-8} \text{ J/m}^3$.

A existência desta imensa energia de ponto zero gera certo desconforto. Primeiramente, não é possível “extrair” energia do mínimo de energia do oscilador harmônico (ver (6.20)), e o mesmo vale para o campo eletromagnético quantizado. Além disso, experimentos de física envolvem diferenças de energia, não importando uma energia de ponto zero, e poderíamos definir o hamiltoniano simplesmente como:

$$H = \sum_m \hbar \omega_m a_m a_m^\dagger, \quad (15.32)$$

em que simplesmente ignoramos o termo referente a energia de ponto zero do hamiltoniano. Entretanto, o fato é que não podemos ignorar a existência da energia de ponto zero. Um fenômeno que parece depender de valores absolutos de energia é a gravitação, pois todas as formas de massa-energia atuam como fontes gravitacionais. Essa é uma complicação adicional de versões quânticas da gravitação. A teoria quântica da gravitação oferece um comprimento de onda mínimo que ofereceria o vetor de onda de corte, dado pelo comprimento de Planck, $(\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-35}$ m. A força de Casimir é outro exemplo de resultado da energia de ponto zero, mas esta mensurável e comprovada experimentalmente, como veremos na próxima seção.

15.4 Força de Casimir

Apesar de a energia de ponto zero ser algo bastante contra-intuitivo, que parece não ter realidade física, Casimir ofereceu uma proposta de experimento que serviria de prova do contrário [44]. Considere uma cavidade de volume L^3 muito grande e feita de paredes condutoras. Uma placa condutora é inserida numa distância R do plano yz , tal que $R \ll L$. Calcularemos a variação de

energia, seguindo os cálculos de Casimir, para ambos lados da placa como função de R .

A mudança na diferença de energia devido a inserção da placa em $x = R$ será dado por:

$$\Delta W = W_R + W_{L-R} - W_L, \quad (15.33)$$

tais que:

$$W_L = \frac{2L^3}{\pi^3} \int \int \int_0^\infty \frac{1}{2} \hbar c k dk_x dk_y dk_z, \quad (15.34)$$

$$W_{L-R} = \frac{2L^2(L-R)}{\pi^3} \int \int \int_0^\infty \frac{1}{2} \hbar c k dk_x dk_y dk_z \quad (15.35)$$

e, como R é pequeno, temos que:

$$W_R = \sum_{n=0}^{\infty} 2\Theta_n \frac{L^2}{\pi^2} \int \int_0^\infty \frac{1}{2} \hbar c k dk_y dk_z, \quad (15.36)$$

em que:

$$\Theta_n = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ 1/2, & n = 0, \end{cases} \quad (15.37)$$

uma vez que o estado $n = 0$ não suporta duas polarizações. Como as integrais são divergentes (divergem pra altas frequências), é necessário incluir uma função de corte, $f(k/k_c)$, tal que as integrais sejam convergentes. Isso não é puramente um artifício matemático pois, para altas frequências, o metal torna-se transparente, não havendo diferença no sistema com ou sem a placa metálica em R , anulando assim as contribuições destes termos no cálculo de ΔW . Combinando os resultados encontramos:

$$\Delta W = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4R^3} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n F(n) - \int_0^\infty F(n) dn \right\}, \quad (15.38)$$

em que:

$$F(n) = \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{w} f\left(\frac{\pi\sqrt{w}}{Rk_c}\right) dw, \quad (15.39)$$

sendo que a forma de $f\left(\frac{\pi\sqrt{w}}{Rk_c}\right)$ depende do material. Com a aproximação da série de Euler-Maclaurin:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n F(n) - \int_0^\infty F(n) dn = \frac{-1}{12} F'(0) + \frac{1}{30 \times 4!} F'''(0) + \dots, \quad (15.40)$$

é possível chegarmos em:

$$\Delta W = -\hbar c \frac{\pi^2}{720} \frac{L^2}{R^3}. \quad (15.41)$$

Para L muito grande, a força por unidade de área será dada por:

$$F = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial \Delta W}{\partial R} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 R^4}, \quad (15.42)$$

onde o sinal negativo indica que a força é atrativa. Essa é a chamada **força de Casimir**. A existência da força de Casimir é associada às oscilações quânticas do vácuo ou, em outras palavras, à presença da energia de ponto zero. A comprovação experimental da força de Casimir veio em 1958, num experimento de placas finas e paralelas, realizado por Sparnaay [45].

A presença de grandezas infinitas é uma anomalia da teoria quântica de campos. Há diversas formas de contornar esses infinitos como, por exemplo, através das chamadas técnicas de renormalização. Além disso, nem todas as teorias são renormalizáveis. A teoria eletromagnética que tratamos nesse capítulo é um exemplo de teoria renormalizável (o cut-off que mencionamos é uma forma de fazê-lo). Um bom exemplo de teoria não-renormalizável é a gravitação e, por conta disso, há grande dificuldade em criar uma teoria quântica de gravidade. A presença destas anomalias é um indício de que alguma revisão radical ainda tenha que ser feita no arcabouço teórico da física.

15.5 Os estados do campo eletromagnético

Tratando o campo eletromagnético como variável dinâmica na teoria quântica, precisamos abordar seus autoestados. Veremos aqui alguns exemplos de estados do campo eletromagnético.

15.5.1 Estado de número de fótons - estados de Fock

Conforme descrevemos na seção 15.1, o campo eletromagnético pode ser descrito por um conjunto infinito enumerável de osciladores harmônicos. Neste contexto, o hamiltoniano do campo eletromagnético é dado por $H_m = \hbar\omega_m \left(a_m^\dagger a_m + \frac{1}{2} \right)$, com autovetores $|n_m\rangle$ e autovalores $n_m = 0, 1, 2, \dots$

O modo m contém n_m fótons. Essas excitações elementares do campo eletromagnético se comportam como partículas em muitos aspectos, mas a analogia não é fidedigna, não sendo possível trocar o campo eletromagnético por um gás de fótons.

Em um estado com número de fótons definidos, os campos elétrico e magnético são indefinidos e flutuantes. Disto é possível calcular:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle n_1, n_2, \dots, n_m, \dots | \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) | n_1, n_2, \dots, n_m, \dots \rangle = 0, \quad (15.43)$$

pois os operadores a_m^\dagger e a_m do campo operando em $|n_m\rangle$ levam o modo em $|n_m \pm 1\rangle$, que é ortogonal a $|n_m\rangle$. Este resultado é consistente uma vez que a média do campo é nula. Por outro lado, o valor esperado do termo ao quadrado será:

$$\begin{aligned}\langle |E|^2 \rangle &= 2\pi\hbar \sum_m \sum_n (\omega_m \omega_n)^{1/2} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_n \langle (a_m^\dagger + a_m)(a_n^\dagger + a_n) \rangle \\ &= 2\pi\hbar \sum_m \omega_m |\mathbf{u}_m(\mathbf{x})|^2 \langle n_m | (a_m^\dagger + a_m)^2 | n_m \rangle \\ &= 2\pi\hbar \sum_m \omega_m |\mathbf{u}_m(\mathbf{x})|^2 (2n_m + 1),\end{aligned}\quad (15.44)$$

onde um dos somatórios é removido pela relação de ortogonalidade (15.7) e utilizamos a relação de comutação (15.21). Note que o valor da intensidade de campo depende linearmente com o número n_m de fótons. Se $n_m = 0, \forall n$, então temos o estado de vácuo cuja energia é a energia de ponto zero.

Este tipo de estados de número de partículas, também chamado de **estados de Fock**, são muito utilizados em óptica quântica, onde normalmente excitam-se um número pequeno e finito de modos, ou mesmo um modo único. O valor médio do campo ao quadrado associado ao m -ésimo modo, normalizado pelo volume Ω , será dado por:

$$\Omega^{-1} \int \langle |\mathbf{E}_m(\mathbf{x})|^2 \rangle d^3x = \Omega^{-1} \int \langle |\mathbf{B}_m(\mathbf{x})|^2 \rangle d^3x = \frac{4\pi}{\Omega} \hbar \omega_m \left(n_m + \frac{1}{2} \right). \quad (15.45)$$

15.5.2 Estados coerentes - laser

Os autovetores de número de fótons formam uma base completa ortogonal para o espaço de estados, mas obviamente nem todos os estados do campo eletromagnético são necessariamente autoestados do operador número. Seria possível descrever um autoestado do campo elétrico (similarmente a autovetores de posição para um oscilador mecânico) porém, nessa situação, as flutuações no campo magnético ficariam ilimitadas (equivalente a incerteza em posição e momento). Estados de maior interesse, nesse sentido, são os **estados coerentes**, nos quais a flutuação de ambos campos é equivalente e mínima (incerteza mínima). Explicitamente, no estado fundamental de um oscilador harmônico os operadores posição e momento têm média zero:

$$\langle 0|Q|0\rangle = \langle 0|P|0\rangle = 0, \quad (15.46)$$

e as variâncias satisfazem à relação de incerteza mínima:

$$\langle 0|Q^2|0\rangle \langle 0|P^2|0\rangle = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (15.47)$$

Para construir o estado coerente, um estado de incerteza mínima com energia superior à energia de ponto zero, introduzimos o operador unitário:

$$D(z) = \exp(za^\dagger - z^*a) = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)e^{za^\dagger}e^{-z^*a}, \quad (15.48)$$

sendo a segunda expressão obtida a partir da primeira usando a identidade Baker-Campbell-Hausdorff¹. Este operador é chamado de operador deslocamento, e os vetores de estados coerentes são construídos pela operação:

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle. \quad (15.49)$$

Usando a expressão (15.48) podemos escrever:

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)e^{za^\dagger}|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \quad (15.50)$$

que dá a relação entre os estados coerentes e os estados de números de fótons. Note que aqui consideramos (6.20), responsável pela supressão do termo e^{-z^*a} . Como o operador $D(z)$ é unitário, vale que $\langle z|z\rangle = 1$. Entretanto, eles não são ortogonais:

$$\langle z|z'\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|z|^2 + |z'|^2) + z^*z'\right]. \quad (15.51)$$

Por compor uma base completa os estados coerentes também satisfazem:

$$\int |z\rangle\langle z|d^2x = \pi\mathbf{1}, \quad (15.52)$$

a relação de completeza. Uma característica importante dos estados coerentes é que a base é super-completa (por não ser linearmente independente). Isso significa que o estado $|z\rangle$ pode ser determinado por uma combinação linear:

$$|z\rangle = I|z\rangle = \pi^{-1}\int |z'\rangle\langle z'|z\rangle d^2z', \quad (15.53)$$

cujas consequência mais importante é que o traço de um operador não vale na forma de uma base de estado coerente:

$$\text{Tr}(A) \neq \int \langle z|A|z\rangle d^2z. \quad (15.54)$$

Pode-se demonstrar que $|z\rangle$ é autoestado do operador aniquilação através de sua operação no estado de vácuo (15.49):

¹Problema 3.4 do livro do Ballentine.

$$\begin{aligned}
0 &= D(z)a|0\rangle \\
&= D(z)aD^{-1}(z)D(z)|0\rangle \\
&= (a - z\mathbf{I})|z\rangle,
\end{aligned} \tag{15.55}$$

onde utilizamos, na última passagem, a identidade do problema 3.3 do livro do Ballentine². De (15.55) temos que

$$a|z\rangle = z|z\rangle. \tag{15.56}$$

Como o operador aniquilação não é hermitiano, z não precisa ser real e a equação de autovetor só se aplica à direita. A equação dual é dada por

$$\langle z|a^\dagger = z^*\langle z|. \tag{15.57}$$

Tendo descrito as propriedades matemáticas do estado coerente $|z\rangle$, construídas a partir do operador deslocamento $D(z)$, podemos agora aprofundar nas suas propriedades físicas. Um estado coerente do campo eletromagnético é obtido especificando o estado coerente para cada modo de oscilação do campo. Assim:

$$|\{z\}\rangle = |z_1, z_2, \dots, z_m, \dots\rangle = |z_1\rangle \otimes |z_2\rangle \otimes \dots \otimes |z_m\rangle \otimes \dots \tag{15.58}$$

Como o operador de campo elétrico no cenário de Heisenberg (ver (15.23) e (3.84)) pode ser escrito como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_m (2\pi\hbar\omega_m)^{1/2} \{a_m^\dagger e^{i\omega_m t} + a_m e^{-i\omega_m t}\} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}), \tag{15.59}$$

a média do campo elétrico no estado coerente será:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \{z\} | \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) | \{z\} \rangle = \sum_m (2\pi\hbar\omega_m)^{1/2} \{z_m^* e^{i\omega_m t} + z_m e^{-i\omega_m t}\} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}), \tag{15.60}$$

onde utilizamos (15.56). A equação acima é idêntica à expansão em modos normais de uma solução clássica das equações de Maxwell, com o número quântico z fazendo o papel de amplitude do campo. A diferença, portanto, é que estamos tratando de uma média e, no caso quântico, temos que calcular a flutuação:

$$\begin{aligned}
\langle |\mathbf{E}_m(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle &= \langle z_m | \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_m | z_m \rangle = \langle z_m | \left\{ (a_m^\dagger)^2 e^{2i\omega_m t} + (a_m)^2 e^{-2i\omega_m t} \right. \\
&\quad \left. + a_m^\dagger a_m + a_m a_m^\dagger \right\} | z_m \rangle 2\pi\hbar\omega_m |\mathbf{u}_m(\mathbf{x})|^2 \\
&= \left\{ (z_m^*)^2 e^{2i\omega_m t} + (z_m)^2 e^{-2i\omega_m t} + z_m^* z_m \right. \\
&\quad \left. + (z_m^* z_m + 1) \right\} 2\pi\hbar\omega_m |\mathbf{u}_m(\mathbf{x})|^2,
\end{aligned} \tag{15.61}$$

² $e^{xA} B e^{-xA} = B + [A, B]x + \frac{[A, [A, B]]x^2}{2} + \frac{[A, [A, [A, B]]]x^3}{6} + \dots$

onde utilizamos a relação de comutação (15.21) para trocar $a_m a_m^\dagger$ por $(a_m^\dagger a_m + 1)$, de tal forma que a flutuação será dada por:

$$\langle \Delta(\mathbf{E}_m)^2 \rangle = \langle |\mathbf{E}_m(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle - \langle \mathbf{E}_m(\mathbf{x}, t) \rangle^2 = 2\pi\hbar\omega_m |\mathbf{u}_m(\mathbf{x})|^2, \quad (15.62)$$

que é independente de z_m e é igual ao valor mínimo de incerteza do estado fundamental. Esse resultado é esperado pois os estados coerentes foram obtidos a partir do deslocamento do estado fundamental no espaço de estados.

Para conhecer a distribuição de número de fótons para cada modo no estado coerente deve-se calcular a probabilidade:

$$Prob(n|z) = |\langle n|z \rangle|^2 = \frac{|z|^{2n} e^{-|z|^2}}{n!}. \quad (15.63)$$

Veja que a probabilidade de se encontrar um total de n fótons no estado de campo é dada por uma distribuição de Poisson. Calculando os valores médios através das propriedades da distribuição de Poisson encontramos:

$$\langle n \rangle = \langle z|a^\dagger a|z \rangle = z^* z = |z|^2, \quad (15.64)$$

e o termo quadrático será:

$$\langle n^2 \rangle = \langle z|a^\dagger a a^\dagger a|z \rangle = z^* \langle z|a a^\dagger|z \rangle z = |z|^2 (|z|^2 + 1), \quad (15.65)$$

logo:

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = |z|^2. \quad (15.66)$$

A flutuação dos campos em um estado coerente é a menor possível, mas cresce com o aumento da intensidade do campo. Entretanto, as flutuações relativas, $\langle \Delta(\mathbf{E}_m)^2 \rangle / \langle |\mathbf{E}_m| \rangle \propto |z_m|^{-1}$ e $\langle (\Delta n)^2 \rangle^{1/2} / \langle n \rangle \propto \langle n \rangle^{-1/2}$ tendem a zero à medida que $|z| \rightarrow \infty$, que é o limite clássico, onde as flutuações do campo são desprezíveis. Os estados coerentes são a melhor base para se descrever um laser.

15.6 Emissão espontânea

Anteriormente, no capítulo 12, analisamos a emissão espontânea através da presença de um campo clássico externo e usamos um argumento puramente estatístico devido a Einstein. Agora iremos obter resultados semelhantes através de uma teoria puramente quanto-mecânica. O hamiltoniano para o sistema é dado por:

$$H = H_{at} + H_{em} + H_{int}, \quad (15.67)$$

em que H_{at} representa o hamiltoniano do átomo, H_{em} o hamiltoniano do campo eletromagnético e H_{int} o hamiltoniano de interação. A forma mais simples de prosseguir é mantermos a **aproximação de dipolo elétrico** (§12.3), que é válida quando o comprimento de onda de radiação do átomo é muito maior se comparado ao diâmetro do átomo. Nesse caso teremos:

$$H_{int} \approx -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (15.68)$$

Calculemos a emissão espontânea na ordem mais baixa da teoria de perturbação usando a regra de ouro de Fermi (12.20):

$$R_s = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle|^2 n(\epsilon_f), \quad (15.69)$$

onde $n(\epsilon_f)$ representa a densidade de estados de fótons ao final do processo de emissão por unidade de energia. Se os modos de campo são confinados em uma cavidade de volume Ω , a densidade de estados será dada por:

$$n(\epsilon_f) = 2 \times \frac{\omega}{(2\pi)^3} \times 4\pi k^2 \times \frac{dk}{d\epsilon} = \frac{\Omega \omega^2}{\pi^2 \hbar c^3}, \quad (15.70)$$

onde consideramos $k = \omega/c$, e 2 estados de polarização para cada k . O estado inicial é dado por $|\psi_i\rangle = |i\rangle \times |0\rangle$, sendo $|i\rangle$ o estado inicial do átomo e $|0\rangle$ o estado de vácuo do campo eletromagnético. O estado final será $|\psi_f\rangle = |f\rangle \times |n_m = 1\rangle$, em que $|f\rangle$ é o estado final do átomo e $|n_m = 1\rangle$ é o estado de um fóton, sendo que a condição de conservação de energia $\epsilon_i - \epsilon_f = \hbar\omega$ deve ser satisfeita. Assim, os elementos de matriz serão:

$$|\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle|^2 = 2\pi \hbar \omega |\langle f | \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_m | i \rangle|^2. \quad (15.71)$$

Substituindo (15.70) e (15.71) em (15.69), encontramos:

$$R_s = \frac{4\omega^3}{\hbar c^3} |\langle f | \mathbf{D} | i \rangle|^2 \frac{\Omega}{3} |\mathbf{u}_m|^2, \quad (15.72)$$

onde o fator de $1/3$ vem da média angular de $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_m)$. Se os modos de campo são descritos por ondas planas, então $|\mathbf{u}_m|^2 = \Omega^{-1}$ e:

$$R_s = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\langle f | \mathbf{D} | i \rangle|^2. \quad (15.73)$$

Note que esse é o mesmo resultado que obtivemos no capítulo 12 se fizermos a substituição adequada do valor de B_{fi} em (12.40). Nossa derivação da expressão faz uso da aproximação de dipolo e, portanto, só será válida em sistemas para os quais os elementos de matrizes na aproximação de dipolo

são não-nulos. Para aproximações de ordens mais elevadas teremos apenas dificuldades técnicas mas o resultado será o mesmo.

Se o tratamento quântico completo dá o mesmo resultado obtido por Einstein, pode-se perguntar qual a vantagem de se “complicar” o problema. O fato é que é possível inibir (ou aumentar) a emissão espontânea, e isso só pode ser explicado com o tratamento quântico completo desenvolvido acima. As emissões atômicas são essencialmente impossíveis de controlar, mas a probabilidade da emissão espontânea não depende apenas do átomo. Se $|\mathbf{u}_m|^2$ não for uniforme no espaço, a simplificação (15.72) não pode ser feita. Utilizando este termo, podemos aumentar ou inibir a emissão espontânea. Como exemplo, usando cavidades espelhadas que colocam em ressonância ou restringem um certo comprimento de onda da luz dentro da cavidade, é possível aumentar ou reduzir a emissão espontânea de átomos excitados dentro dela. Uma diminuição em um fator de até vinte vezes na taxa de emissão espontânea de átomos excitados foi demonstrado experimentalmente em [46].

15.7 Detectores de fótons e o Cenário de Interações

Passamos agora a abordar aspectos práticos da realização de um experimento utilizando fótons. Para isso, precisamos detectá-los, e isto é feito em laboratório utilizando geralmente o efeito foto-elétrico.

Vamos calcular a probabilidade de ionização de um átomo através da absorção de um fóton usando teoria de perturbação até primeira ordem. O hamiltoniano do sistema será:

$$H = H_0 + V, \quad (15.74)$$

em que $H_0 = H_{at} + H_{em}$ é a soma do hamiltoniano do átomo com o hamiltoniano do campo eletromagnético. Para a interação usaremos a aproximação de dipolo elétrico, como antes:

$$V = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (15.75)$$

- **Cenário de interação:**

Para abordar este problema, é interessante introduzir e utilizar o chamado **cenário de interação**, que é obtido do cenário padrão de Schrödinger através de transformações unitárias:

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{i(t-t_0)H_0/\hbar} |\Psi_s(t)\rangle, \quad (15.76)$$

15.7. DETECTORES DE FÓTONS E O CENÁRIO DE INTERAÇÕES 213

$$\rho_I(t) = e^{i(t-t_0)H_0/\hbar} \rho_s(t) e^{-i(t-t_0)H_0/\hbar}, \quad (15.77)$$

$$R_I(t) = e^{i(t-t_0)H_0/\hbar} R_s e^{-i(t-t_0)H_0/\hbar}. \quad (15.78)$$

Escrevendo-se a equação de movimento para o vetor de estado $\Psi_I(t)$ ou para o operador de estado $\rho_I(t)$ demonstra-se que sua dependência temporal depende apenas do termo de interação:

$$V_I(t)|\Psi_I(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle, \quad (15.79)$$

Onde $V_I(t) = e^{i(t-t_0)H_0/\hbar} V e^{-i(t-t_0)H_0/\hbar}$, e a dependência do vetor de estado é dada por

$$\begin{aligned} |\Psi_I(t)\rangle &= |\Psi_I(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') |\Psi_I(t')\rangle dt' \\ &\approx |\Psi_I(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') dt' |\Psi_I(0)\rangle. \end{aligned} \quad (15.80)$$

Introduzido o cenário de interação, voltamos para o problema de interesse, a detecção de fótons. Neste caso, $V_I(t) = e^{i(t-t_0)H_0/\hbar} V e^{-i(t-t_0)H_0/\hbar} = -\mathbf{D}_I(t) \cdot \mathbf{E}_I(t)$. Em $t_0 = 0$, o átomo está no estado $|a\rangle$ e o campo no estado $|\psi_i\rangle$:

$$|\Psi_I(0)\rangle = |a; \psi_i\rangle = |a\rangle \otimes |\psi_i\rangle. \quad (15.81)$$

Considerando um possível estado final $|b; \psi_f\rangle = |b\rangle \otimes |\psi_f\rangle$ ortogonal ao estado inicial, a amplitude de transição para este estado final, em primeira ordem, é dada por:

$$\begin{aligned} \langle b; \psi_f | \Psi_I(t) \rangle &= \langle b; \psi_f | a; \psi_i \rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle b; \psi_f | V_I(t') | a; \psi_i \rangle dt' \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i(\epsilon_b - \epsilon_a)t'/\hbar} \langle b | \mathbf{D} | a \rangle \cdot \langle \psi_f | \mathbf{E}(t') | \psi_i \rangle dt', \end{aligned} \quad (15.82)$$

onde foi considerado que H_{at} e H_{em} comutam em H_0 por atuarem em subespaços distintos. Desta forma, considerando os estados a e b do átomo com energias ϵ_a e ϵ_b , respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} \langle b | \mathbf{D}_I(t) | a \rangle &= \langle b | e^{i(t)H_0/\hbar} \mathbf{D} e^{-i(t)H_0/\hbar} | a \rangle \\ &= \langle b | e^{i(t)H_{at}/\hbar} \mathbf{D} e^{-i(t)H_{at}/\hbar} | a \rangle = e^{i(\epsilon_b - \epsilon_a)t/\hbar} \langle b | \mathbf{D} | a \rangle, \end{aligned} \quad (15.83)$$

onde $\langle b | \mathbf{D} | a \rangle$ é o elemento de matrix no cenário de Schrödinger. Considerando longos tempos de detecção (quando comparados às frequências de oscilação

dos campos), a integral em (15.82) é dominada por campos de frequência ω_{ba} (fótons de energia $\hbar\omega_{ba} = \epsilon_b - \epsilon_a$, ver §12.1 e equações (12.17)-(12.19)).

Procedimento similar relaciona o operador de campo apenas aos estados do campo $|\psi_{i,f}\rangle$, e a forma de $\mathbf{E}_I(t)$ já foi obtida considerando o Hamiltoniano do campo (15.20), sendo dada pela expressão (15.59). Para os tratamentos que aqui se seguem é adequado escrever $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}^{(-)}(t) + \mathbf{E}^{(+)}(t)$,³ com:

$$\mathbf{E}^{(+)}(t) = \sum_m \sqrt{2\pi\hbar\omega_m} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) a_m e^{-i\omega_m t}, \quad (15.84)$$

$$\mathbf{E}^{(-)}(t) = \sum_m \sqrt{2\pi\hbar\omega_m} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) a_m^\dagger e^{i\omega_m t}. \quad (15.85)$$

Uma boa aproximação é desconsiderar $\mathbf{E}^{(-)}(t)$, devido à geralmente pequena contribuição da componente de frequência negativa na integral temporal, o que é equivalente a dizer que não há criação de fótons no processo de interesse (detecção)⁴ e seguimos com:

$$\langle b; \psi_f | \Psi_I(t) \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i(\epsilon_b - \epsilon_a)t'/\hbar} \sum_{\nu=1}^3 \langle b | D_\nu | a \rangle \langle \psi_f | E_\nu^{(+)} | \psi_i \rangle dt'. \quad (15.86)$$

Por fim, a probabilidade da detecção ser registrada será

$$P_b(t) = M(b) \sum_f |\langle b; \psi_i | \Psi_I(t) \rangle|^2, \quad (15.87)$$

onde $M(b)$ é a probabilidade de registro dos eventos, geralmente de origem eletrônica, relacionada aos aspectos tecnológicos do detector que não são considerados explicitamente aqui. A parte explícita do campo será dada por:

$$\begin{aligned} \sum_f \langle \psi_f | E_\mu^{(+)}(t'') | \psi_i \rangle^* \langle \psi_f | E_\nu^{(+)}(t') | \psi_i \rangle &= \sum_f \langle \psi_i | E_\mu^{(-)}(t'') | \psi_f \rangle \langle \psi_f | E_\nu^{(+)}(t') | \psi_i \rangle \\ &= \langle \psi_i | E_\mu^{(-)}(t'') E_\nu^{(+)}(t') | \psi_i \rangle. \end{aligned} \quad (15.88)$$

Para uma detecção de banda larga, ou seja, onde o estado final b do elétron não é determinado, calcula-se:

$$P(t) = \int P_b(t) \eta(\epsilon_b) d\epsilon_b, \quad (15.89)$$

³Não confundir o sinal (+) com o sinal † do Hermitiano conjugado.

⁴A separação do campo eletromagnético em componentes de frequências positiva e negativa já apareceu no tratamento semiclassico da seção §12.1, relacionado a condições de absorção ou emissão ressonantes (12.17).

15.7. DETECTORES DE FÓTONS E O CENÁRIO DE INTERAÇÕES 215

em que $\eta(\epsilon_b)$ é a densidade de estados com energia ϵ_b . Usando (15.86), (15.87) e (15.88), a probabilidade de detecção será:

$$P(t) = \int_0^t \int_0^t \sum_{\mu} \sum_{\nu} s_{\nu\mu}(t' - t'') \langle E_{\mu}^{(-)}(t'') E_{\nu}^{(+)}(t') \rangle dt' dt'' \quad (15.90)$$

$$\Rightarrow s_{\nu\mu}(t' - t'') = \int \frac{M(b)}{\hbar^2} \langle b|D_{\nu}|a\rangle \langle b|D_{\mu}|a\rangle e^{i(\epsilon_b - \epsilon_a)(t' - t'')/\hbar} \eta(\epsilon_b) d\epsilon_b, \quad (15.91)$$

onde $s_{\nu\mu}$ é a *função sensibilidade* do detector, que determina sua seletividade para frequências e polarizações específicas do campo e introduzimos também a função correlação:

$$\langle E_{\mu}^{(-)}(t'') E_{\nu}^{(+)}(t') \rangle = \text{Tr} \{ \rho_{em} E_{\mu}^{(-)}(t'') E_{\nu}^{(+)}(t') \}, \quad (15.92)$$

que se resume a (15.88) para campos cujo estado inicial é um estado puro $|\psi_i\rangle$. Considerando que o detector tem eficiência constante (independente da energia do fóton) numa faixa de interesse (largura de banda da radiação), o que significa dizer que a função sensibilidade do detector só depende da energia no fator explícito $e^{i(\omega_{ba})(t' - t'')}$, a integral em (15.91) de $-\infty$ até ∞ leva a:

$$s_{\nu\mu}(t' - t'') \rightarrow s_{\nu\mu} \delta(t' - t''), \quad (15.93)$$

daí a taxa de detecção será:

$$R(t) \frac{dP}{dt} = \sum_{\mu} \sum_{\nu} s_{\nu\mu} \langle E_{\mu}^{(-)}(t) E_{\nu}^{(+)}(t) \rangle, \quad (15.94)$$

que depende do campo em um único momento do tempo, mas só é válida se a largura do detector for maior que a da radiação. Além disso, o valor da função correlação tem que ser aproximadamente constante (e $s_{\nu\mu} \neq 0$) dentro do intervalo de tempo τ , que é o recíproco da largura de banda do detector.

Este tratamento pode ser generalizado para a detecção de n fótons em pontos do espaço-tempo distintos. Neste caso, estamos interessados em analisar a função de correlação:

$$\langle \psi_f | E^{(+)}(x_n, t_n) \cdots E^{(+)}(x_1, t_1) | \psi_i \rangle, \quad (15.95)$$

tomando o quadrado em todos os estados finais obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_f \langle \psi_i | E^{(-)}(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots E^{(-)}(\mathbf{x}_n, t_n) | \psi_f \rangle \langle \psi_f | E^{(+)}(\mathbf{x}_n, t_n) \cdots E^{(+)}(\mathbf{x}_1, t_1) | \psi_i \rangle = \\ = \langle \psi_i | E^{(-)}(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots E^{(-)}(\mathbf{x}_n, t_n) E^{(+)}(\mathbf{x}_n, t_n) \cdots E^{(+)}(\mathbf{x}_1, t_1) | \psi_i \rangle. \end{aligned} \quad (15.96)$$

Ou seja, a probabilidade de detecção de n fótons está diretamente associada à função correlação do campo elétrico em ordem mais alta.

15.8 Funções de correlação

Por simplicidade de notação, escrevemos $E_\nu(\mathbf{x}_n, t_n) = E(x_n)$, onde um único rótulo x_n carrega as informações de espaço, tempo e polarização (ν) do campo. Com isso definimos a função de correlação de n -pontos (ou função de correlação de ordem n):

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \langle E^{(-)}(x_1) \cdots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \cdots E^{(+)}(x_{2n}) \rangle. \quad (15.97)$$

Na seção anterior vimos que a probabilidade de detecção de um fóton em cada ponto x_1, \dots, x_n é proporcional à função de correlação diagonal:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1), \quad (15.98)$$

com um fator de proporcionalidade dependente do detector. Efetivamente, o que um detector mede são correlações diagonais, mas é possível obter informações dos termos não diagonais através dos termos de interferência de campos. Como exemplo, é possível detectar dois ou mais fótons advindos de pontos diferentes do espaço-tempo e de diferentes polarizações, tal que poderemos medir correlações não-diagonais. Consideremos um detector d que pode detectar fótons originários de pontos distintos x_1 e x_2 , tal que $E_d = E(x_1) + E(x_2)$. Desta forma, tem-se que:

$$\langle E_d^{(-)} E_d^{(+)} \rangle = G^{(1)}(x_1; x_1) + G^{(1)}(x_2; x_2) + G^{(1)}(x_1; x_2) + G^{(1)}(x_2; x_1), \quad (15.99)$$

e assim se determina os termos não diagonais da função correlação entre os campos originários de pontos distintos x_1 e x_2 , embora estritamente falando, o que é possível medir é a função de correlação diagonal $G^{(1)}(x_d; x_d)$, e a informação extra vem, por exemplo, da possibilidade de se variar a posição do detector d para medir um padrão de interferência (típico de um experimento de fendas duplas, como veremos em §15.8.2).

15.8.1 Propriedades matemáticas das funções de correlação

Listamos aqui algumas propriedades matemáticas das funções de correlação que são de interesse:

- $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ é invariante à permutação das variáveis nos subconjuntos $x_1 - x_n$ e $x_{n+1} - x_{2n}$. Isso ocorre porque os operadores de criação e aniquilação comutam entre si.

- b) Vale que: $G^{(n)}(x_{2n}, \dots, x_{n+1}; x_n, \dots, x_1) = [G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n})]^*$.
Isto vem do fato que $E^-(x_2)E^+(x_1) = [E^-(x_1)E^+(x_2)]^\dagger$.
- c) Como vale que $\text{Tr}(\rho A^\dagger A) \geq 0$, então $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) \geq 0$, ou seja, todos os termos diagonais são não-negativos.
- d) Desigualdade de Schwarz⁵ para as funções correlação:

$$\begin{aligned} & G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1)G^{(n)}(x_{n+1}, \dots, x_{2n}; x_{2n}, \dots, x_{n+1}) \\ & \geq \left| G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \right|^2 \end{aligned} \quad (15.100)$$

15.8.2 Correlação de primeira ordem: interferência

A taxa de detecção de um fóton em x é proporcional a:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x; x) &= \langle E^{(-)}(x)E^{(+)}(x) \rangle \\ &= \sum_n \sum_m 2\pi\hbar\sqrt{\omega_n\omega_m} \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \langle a_n^\dagger a_m \rangle, \end{aligned} \quad (15.101)$$

onde a forma espacial do padrão de interferência vem do termo $\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_m(\mathbf{x})$, que é similar ao caso clássico, exceto pelo fato de que o caráter quântico expressa-se através de $\langle a_n^\dagger a_m \rangle$.

O modelo mais simples, e ainda bastante útil, e que nos permite visualizar os termos da expressão genérica (15.101), consiste em considerar duas ondas planas cujos únicos estados excitados acima do estado fundamental têm a forma $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \propto e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}}$ e $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}) \propto e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}$, com $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \omega/c$. Como os modos de campo no estado fundamental não contribuem para a detecção temos apenas que considerar os termos de operadores de campo para os estados excitados. Daí teremos:

$$E^{(+)}(x) = C(a_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} + a_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}) e^{-i\omega t}, \quad (15.102)$$

$$E^{(-)}(x) = C(a_1^\dagger e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} + a_2^\dagger e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}) e^{i\omega t}, \quad (15.103)$$

em que todas as constantes foram absorvidas na constante C . A taxa de contagem de fótons, então, será:

$$\begin{aligned} G^{(+)}(x; x) &= C^2 \left\{ \langle a_1^\dagger a_1 \rangle + \langle a_2^\dagger a_2 \rangle + \langle a_1^\dagger a_2 \rangle e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} + \langle a_2^\dagger a_1 \rangle e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \right\} \\ &= C^2 \left\{ \langle a_1^\dagger a_1 \rangle + \langle a_2^\dagger a_2 \rangle + 2 \left| \langle a_1^\dagger a_2 \rangle \right| \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - \phi] \right\}, \end{aligned} \quad (15.104)$$

⁵Também conhecida como desigualdade de Cauchy, ou desigualdade de Cauchy-Schwarz, ou ainda desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

sendo que a fase vem de: $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle = |a_1^\dagger a_2| e^{i\phi}$.

Vamos estudar a aplicação deste formalismo de interferência em três exemplos de estados para discutir sobre a origem física dos fenômenos de interferência.

Exemplo 26 (Estado de um fóton) *Considere um vetor de estado do campo eletromagnético como sendo dado por:*

$$|\psi_1\rangle = \alpha|1, 0\rangle + \beta|0, 1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (15.105)$$

em que o vetor $|1, 0\rangle = a_1^\dagger|0\rangle$ descreve o fóton no modo 1 e $|0, 1\rangle = a_2^\dagger|0\rangle$ descreve o fóton no modo 2. O estado de vácuo é denotado por $|0\rangle$. Nesse caso a probabilidade de detecção de fótons é:

$$G^{(1)}(x; x) = C^2 \{ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}[\beta^* \alpha e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}] \}. \quad (15.106)$$

Exemplo 27 (Estados de dois fótons) *Considere agora o seguinte vetor:*

$$|\psi_2\rangle = \alpha|2, 0\rangle + \beta|1, 1\rangle + \gamma|0, 2\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1, \quad (15.107)$$

nesse caso a função de correlação de primeira ordem será:

$$G^{(1)}(x; x) = C^2 \{ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + 2\text{Re}[\sqrt{2}(\beta^* \alpha + \gamma^* \beta) e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}] \}. \quad (15.108)$$

Exemplo 28 (Feixes de laser independentes) *Considere um estado descrito por:*

$$|\psi\rangle = |z_1\rangle \otimes |z_2\rangle, \quad (15.109)$$

que representa a superposição de dois feixes de laser independentes. Por simplicidade consideramos $\omega_1 = \omega_2$, de forma que o fator dependente do tempo $e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} = 1$, ou seja, a fase não flutua no tempo, e a função de correlação de primeira ordem será dada por:

$$G^{(1)}(x; x) = C^2 \{ |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}[z_2^* z_1 e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}] \}. \quad (15.110)$$

Vale notar que este é um fenômeno difícil de detectar pelo fato do laser possuir uma largura, o que faz com que a interferência sofra deslocamentos devido ao fator $e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}$. Efetivamente, deve-se detectar um número de fótons suficiente antes que a fase varie significativamente.

Com base nestes três exemplos, podemos agora discutir sobre a origem física do fenômeno de interferência, de acordo com a M.Q. O primeiro exemplo mostra um padrão de interferência igual ao observado na óptica clássica, embora apenas um fóton passe pelo anteparo de fendas e chegue ao detector por vez. Ou seja, a M.Q. prevê corretamente o padrão de interferência no experimento de um único fóton. Para observar este efeito experimentalmente devemos realizar um conjunto de medidas, preparando os estados e detectando os fótons em cada repetição do experimento e, após realizar a distribuição estatística dos fótons detectados, observa-se o padrão de interferência aparecer. Um exemplo é mostrado na Fig. 15.1, um experimento onde as interferências são criadas dividindo a frente de onda com o biprisma de Fresnel registrando os “cliques de fóton único” com uma câmera CCD intensificada [47].

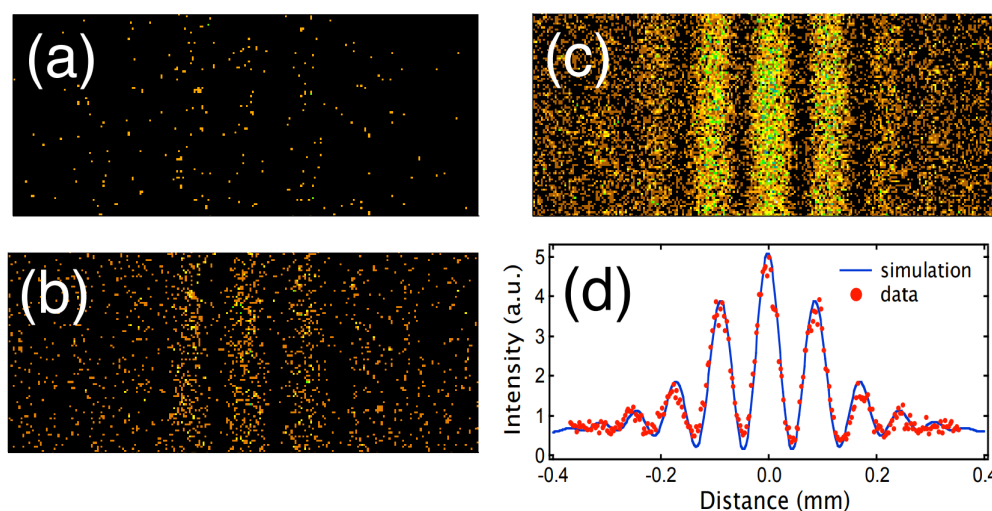


Figura 15.1: Experimento de interferência de fóton único. Cada ponto branco representa um fóton que chegou em um ponto específico do detector (fundo negro). A imagem (a) (resp. (b) e (c)) é composta de 272 contagens de fotos (resp. 2240 e 19773), correspondendo a uma duração de exposição de 20 s (respectivamente 200 se 2000 s). O gráfico (d) exhibe as franjas de interferência resultantes da imagem (c). Extraído de [47].

O estado de dois fótons tem algumas peculiaridades. Se $\alpha = \gamma = 0$ e $\beta = 1$ não há interferência.⁶ Se, independentemente do valor de α e γ , $\beta = 0$, também não há interferência. A regra factual e intrigante é que a interferência só ocorre se o estado de dois fótons for tal que não está definido se os fótons passaram separados ou juntos em uma mesma fenda. No caso da interferência

⁶Veremos que isso é válido apenas para correlações de primeira ordem. Podem existir correlações de ordens superiores, que veremos mais adiante.

de fóton único, a interferência só aparece se o estado inicial for tal que não se sabe por qual fenda o elétron passou (α e β não nulos em (15.106)).

Estes dois casos parecem suportar uma afirmação (atribuído a Dirac), de que um fóton só interfere com ele mesmo. Entretanto, se assim fosse não haveria padrão de interferência na correlação de dois lasers independentes (último exemplo). O que parece mais correto é dizer que o padrão de interferência não é um fenômeno relacionado ao(s) fóton(s), mas uma propriedade dos campos. Lembremos que os campos são as variáveis dinâmicas fundamentais da teoria, são eles que estão representados pelos operadores. Quando falamos em ponto x_n ou vetor \mathbf{k}_n , estamos nos referindo a propriedades e parâmetros do campo, e não dos fótons. Os fótons são excitações elementares do campo, são quantidades secundárias.

15.8.3 Correlações de segunda ordem

Consideremos um experimento onde colocamos um detector em x_1 e outro em x_2 . Qual a probabilidade de ambos detectarem 1 fóton? Essa probabilidade é proporcional às funções de correlação de segunda ordem:

$$G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = \langle E^{(-)}(x_1)E^{(-)}(x_2)E^{(+)}(x_2)E^{(+)}(x_1) \rangle. \quad (15.111)$$

No estado $|\psi\rangle = \alpha|2, 0\rangle + \beta|1, 1\rangle + \gamma|0, 2\rangle$, a função de correlação (15.111) terá 16 termos. Se o estado for $|\psi\rangle = |1, 1\rangle$ teremos 4 termos e o resultado será:

$$\begin{aligned} & \langle 1, 1 | E^{(-)}(x_1)E^{(-)}(x_2)E^{(+)}(x_2)E^{(+)}(x_1) | 1, 1 \rangle \\ &= C^4 \langle a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 a_1 \rangle 2 \{ 1 + \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)] \} \\ &= 2C^4 \{ 1 + \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)] \}. \end{aligned} \quad (15.112)$$

Note que este estado de dois fótons com $\alpha = \gamma = 0$ e $\beta = 1$, que concluímos não possuir fenômeno de interferência em primeira ordem ($G^{(1)}(x; x)$ constante em (15.108)), possui um fenômeno tipo interferência que está evidenciado pela função de correlação de segunda ordem. Podemos entender que há uma correlação (quântica) entre o estado de dois fótons pois, conforme evidenciado em (15.112), a função de correlação depende dos momentos $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ e da separação entre os detectores $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. Análogo ao caso da interferência em primeira ordem, onde os termos não diagonais da correlação entre os campos podem ser acessados variando a posição \mathbf{x} do detector, aqui a correlação em segunda ordem dos campos pode ser acessada através das oscilações em $G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1)$ variando-se $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$.

15.9 Coerência

A primeira definição de coerência para campos eletromagnéticos surgiu devido a Glauber [48]. Define-se coerência como sendo uma sequência infinita de correlações. Seguindo a definição de Glauber, um campo terá coerência de n -ésima ordem se, e somente se, existir uma função $f(x)$ tal que seja válido:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \prod_{j=1}^n f^*(x_j) \prod_{k=n+1}^{2n} f(x_k). \quad (15.113)$$

Se essa equação for válida $\forall n$, então dizemos que existe **coerência completa**. Um campo clássico é sempre completamente coerente pois:

$$\begin{aligned} & \langle E^{(-)}(x_1) \cdots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \cdots E^{(+)}(x_{2n}) \rangle \\ &= E^{(-)}(x_1) \cdots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \cdots E^{(+)}(x_{2n}). \end{aligned} \quad (15.114)$$

Já para um campo quântico, devido às flutuações, não é óbvio se ele é completamente coerente ou não. Mais ainda, não é completamente óbvio se em M.Q. é possível existir um campo completamente coerente.

Uma forma de medir a coerência de forma quantitativa é computar a função de coerência normalizada:

$$g^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = \frac{G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n})}{\prod_{k=1}^{2n} \{G^{(1)}(x_k; x_k)\}^{1/2}}, \quad (15.115)$$

se $|g^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n})|$ for igual a 1 teremos coerência completa de ordem n . Como a coerência completa não é atingível em M.Q., é válido falarmos de coerência em até determinada ordem e em um volume finito. Isso descarta a necessidade de se falar sobre estados “incoerentes” recorrendo apenas à coerência parcial até uma dada ordem. Vejamos mais detalhes a seguir.

15.9.1 Coerência de primeira ordem

Para $n = 1$ a função de correlação que garante coerência é:

$$G^{(1)}(x_1; x_2) = f^*(x_1)f(x_2), \quad (15.116)$$

e nesse caso a desigualdade de Schwarz (15.100) torna-se uma igualdade:

$$G^{(1)}(x_1; x_1)G^{(1)}(x_2; x_2) = |G^{(1)}(x_1; x_2)|^2 \quad (15.117)$$

uma vez que $G^{(1)}(x_i; x_j) = f^*(x_i)f(x_j)$, para $i, j = 1, 2$. Assim temos que $g^{(1)}(x_1; x_2) = 1$. Coerência completa em primeira ordem implica que as demais funções de correlação devem ter a seguinte forma:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = g_n \prod_{j=1}^n f^*(x_j) \prod_{k=n+1}^{2n} f(x_k). \quad (15.118)$$

onde $g_n \leq 0$ e independente das variáveis x_k . Por definição, $g_1 = 1$ para um estado coerente em primeira ordem, e os valores não negativos de g_n podem ser maiores ou menores que 1 (leva aos conceitos de bunching e anti-bunching, que veremos em §15.9.4). Substituindo (15.118) em (15.115) fica evidente que as funções de coerência normalizadas para um estado coerente em primeira ordem são independentes de x_k : $g^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = g^{(n)}$. Ou seja, se o estado é coerente em primeira ordem, a coerência nas ordens superiores dependem apenas das constantes g_n .

Se o campo possuir apenas um modo, o numerador e o denominador de (15.115) terão fatores dependentes do espaço e tempo idênticos, e a função de coerência normalizada reduz-se a uma constante da seguinte forma:

$$g^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = g^{(n)} = \frac{\langle (a^\dagger)^n a^n \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^n}. \quad (15.119)$$

Aqui fica evidente que $g^{(1)} = 1$, ou seja, um campo de um único modo é completamente coerente até primeira ordem, e o que foi discutido acima para campos com $g^{(1)} = 1$ vale necessariamente para os campos de um único modo.

Nas próximas seções veremos casos particulares de estados parcialmente coerentes, incluindo os conceitos de bunching, anti-bunching e super-bunching.

15.9.2 Estados de m -fótons com modo único - coerência parcial

A função de coerência normalizada para um campo de modo único pode ser avaliada através da identidade:

$$(a^\dagger)^n a^n = N(N-1)(N-2) \cdots (N-n+1), \quad (15.120)$$

em que $N = a^\dagger a$ é o operador número para o modo. Então, para o estado de m -fótons, $N|m\rangle = m|m\rangle$ obtemos:

$$g^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!m^n}, & (n \leq m), \\ 0, & (n > m). \end{cases} \quad (15.121)$$

Alguns valores dessa função estão listados na tabela a seguir:

| nº de fótons | $g^{(1)}$ | $g^{(2)}$ | $g^{(3)}$ | $g^{(4)}$ |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $m = 1$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $m = 2$ | 1 | 1/2 | 0 | 0 |
| $m = 3$ | 1 | 2/3 | 2/9 | 0 |
| $m = 4$ | 1 | 3/4 | 3/8 | 3/32 |

Tabela 15.1: Tabela com possíveis valores da função de correlação normalizada para determinados valores de números de fótons.

Como já pontuado na seção anterior, modos únicos têm, necessariamente, $g^{(1)} = 1$, independente do número de fótons m do modo. E como todos os modos com $m > 1$ são completamente coerentes em primeira ordem. Para um valor fixo de ordem de coerência n , o grau de coerência cresce, e tende para $g^{(n)} \rightarrow 1$ no limite $m \rightarrow \infty$. Ou seja, efetivamente, nenhum estado de número de fótons definido é totalmente coerente em todas as ordens.

15.9.3 Radiação térmica filtrada

Um estado que podemos introduzir aqui é o que representa a radiação térmica, que é um estado não puro. O operador de estado para radiação térmica é dado por $\rho_\tau = e^{-H_{em}/k_B T} [\text{Tr}(e^{-H_{em}/k_B T})]^{-1}$. A largura da banda de frequência da radiação térmica pode ser reduzida através de um filtro estreito de passagem de frequências. O limite final do processo de filtragem (embora não seja possível de atingir na prática) será um campo de modo único. O operador de estado resultante para o modo será o de um oscilador harmônico no equilíbrio térmico:

$$\rho = \frac{\sum_m e^{\alpha m} |m\rangle\langle m|}{\sum_m e^{\alpha m}}, \quad (15.122)$$

em que $\alpha = \hbar\omega/k_B T$. Com isso a função de coerência normalizada será dada por uma constante (modo único):

$$g^{(n)} = \frac{\text{Tr}[\rho (a^\dagger)^n a^n]}{[\text{Tr}(\rho a^\dagger a)]^n} = \frac{[\sum_m \langle m | (a^\dagger)^n a^n | m \rangle e^{-\alpha m}] [\sum_m e^{-\alpha m}]^{n-1}}{[\sum_m m e^{-\alpha m}]^n} = n! \quad (15.123)$$

Note que, neste caso, $g^{(1)} = 1$ e $g^{(n)} > 1$ para $n > 1$.

15.9.4 Coerência temporal em segunda ordem, bunching, anti-bunching e super-bunching

Vimos, até aqui, exemplos de estados onde $g^{(n)} < 1$, os estados do operador número (§15.9.2); estados onde $g^{(n)} > 1$, os estados térmicos (§15.9.3); e temos ainda os estados coerentes (§15.5.2), para os quais vale $g^{(n)} = 1$ ⁷. Todos esses são estados coerentes em primeira ordem, portanto, as diferenças de coerência entre eles não podem ser determinadas com experimentos usuais de interferometria (medidas de intensidade), uma vez que nesses experimentos aparecem apenas correlações de primeira ordem. Por isso assume-se que não faz sentido falar em estados coerentes e estados incoerentes. Para se distinguir graus de coerência de estados, é preciso realizar medidas de correlações de ordens superiores. No caso dos estados discutidos aqui (estados de Fock, térmico e coerente), a correlação em segunda ordem é capaz de distingui-los, como veremos a seguir.

A correlação de segunda ordem de fótons no tempo é usualmente descrita pela função de correlação normalizada dada por:

$$g^{(2)}(t, t + \tau) = \frac{G^{(2)}(t, t + \tau; t + \tau, t)}{G^{(1)}(t, t)G^{(1)}(t + \tau, t + \tau)}, \quad (15.124)$$

que corresponde à probabilidade de detectar um fóton no tempo t , seguido da detecção de um segundo fóton em um tempo τ após a detecção do primeiro, dividido pela taxa de contagem independentes dos fótons, de tal maneira que $g^{(2)} = 1$ para fótons não-correlacionados.

Se, adicionalmente, o estado é estacionário, vale que $g^{(2)}(t, t + \tau) = g^{(2)}(\tau)$. Há três possibilidades para $g^{(2)}(\tau)$, se $g^{(2)}(\tau) > 1$, para τ pequeno, os fótons estão próximos um do outro, fenômeno chamado de **bunching**⁸; se $g^{(2)}(\tau) < 1$, para τ pequeno, os fótons estão afastados um do outro, fenômeno chamado de **anti-bunching**.

Consideremos, primeiramente, a luz em um estado de Fock puro, descrito pelo ket $\{m_k\}$, de tal forma que o operador de estado será $\rho = |m_k\rangle\langle m_k|$ e assim teremos que:

$$\langle N \rangle = \text{Tr}\{\rho_k N\} = \langle m_k | N | m_k \rangle = m_k, \quad (15.125)$$

$$\langle N^2 \rangle = \text{Tr}\{\rho_k N^2\} = \langle m_k | N^2 | m_k \rangle = m_k^2. \quad (15.126)$$

⁷Um estado coerente não deve ser, necessariamente, monocromático. Entretanto, um estado coerente estacionário deve ser, necessariamente, monocromático. Não misturar os conceitos de radiação coerente e monocromática (monofrequência).

⁸Traduz-se por agrupamento ou amontoamento.

A função de correlação normalizada (15.119) será tal que:

$$g^{(2)}(\tau = 0) = \frac{\langle a_k^\dagger a_k^\dagger a_k a_k \rangle}{\langle a_k^\dagger a_k \rangle^2}. \quad (15.127)$$

Usando as relações de comutação enter os operadores de criação e aniquilação (6.11) chegamos em:

$$g^{(2)}(\tau = 0) = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle}{\langle N \rangle^2} = \frac{m_k^2 - m_k}{m_k^2} = 1 - \frac{1}{m_k}, \quad (15.128)$$

como $g^{(2)}(0) < 1$, esse caso descreve o fenômeno do antibunching. Para o estado de fóton único ($m_k = 0$), temos $g^{(2)}(\tau = 0) = 0$.

Vejamos agora a luz de um laser em estado coerente, tal que $\rho_k = |z_k\rangle\langle z_k|$ e com isso teremos:

$$\begin{aligned} g^{(2)}(0) &= \frac{\langle a_k^\dagger a_k^\dagger a_k a_k \rangle}{\langle a_k^\dagger a_k \rangle^2} = \frac{\text{Tr}\{\rho_k a_k^\dagger a_k^\dagger a_k a_k\}}{[\text{Tr}\{a_k^\dagger a_k\}]^2} \\ &= \frac{\langle z_k | a_k^\dagger a_k^\dagger a_k a_k | z_k \rangle}{[\langle z_k | a_k^\dagger a_k | z_k \rangle]^2} = \frac{z_k^4}{z_k^4} = 1. \end{aligned} \quad (15.129)$$

Esse resultado é consistente com a teoria clássica de campos, sendo independente da intensidade do campo: a função de correlação para estados coerentes é sempre constante e igual a um, independente da sua intensidade.

Por fim consideremos o estado de luz térmica, tal que:

$$\rho_k = \frac{\sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\alpha n_k} |n_k\rangle\langle n_k|}{\sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\alpha n_k}}. \quad (15.130)$$

Considerando a lei de Planck:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{e^{-\alpha} - 1}, \quad (15.131)$$

podemos escrever:

$$\rho_k = \sum_{n_k=0}^{\infty} P(n_k) |n_k\rangle\langle n_k|, \quad (15.132)$$

onde:

$$P(n_k) = \frac{1}{1 + \langle N \rangle} \left[\frac{\langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle} \right]^{n_k}, \quad (15.133)$$

de tal forma que teremos:

$$\langle N^2 \rangle = \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k^2 P(n_k) = \langle N \rangle + 2\langle N \rangle^2, \quad (15.134)$$

e aí teremos:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle N \rangle + 2\langle N \rangle^2 - \langle N \rangle}{\langle N \rangle^2} = 2, \quad (15.135)$$

que descreve o fenômeno de bunching dos fótons coincidentes no tempo. Esse também é um fenômeno possível de ser descrito classicamente, pois baseia-se na simetria de reversão no tempo, dobrando a probabilidade de se observar um dado número de fótons uma vez que para $\tau \rightarrow 0$, $t - \tau = t + \tau$.

A correlação de segunda ordem pode ser medida utilizando dois contadores de fótons⁹ e um sistema correlacionador de fótons¹⁰, que nada mais é do que uma eletrônica que dispara um cronômetro quando um fóton chega em um dos detectores, e para o cronômetro quando um fóton chega no outro detector, e contabiliza o número de contagens em função do tempo τ .

Apresentamos na Fig. 15.2 uma representação esquemática dos fenômenos de bunching, anti-bunching e o estado de luz coerente. A forma exata desta curva depende do espectro de frequências do campo. Dependendo do sistema, a função pode oscilar ou ter outro comportamento até atingir o limite assintótico. Além disto, em experimentos reais a curva dependerá dos tempos envolvidos nos processos de contagem do sistema correlacionador de fótons.

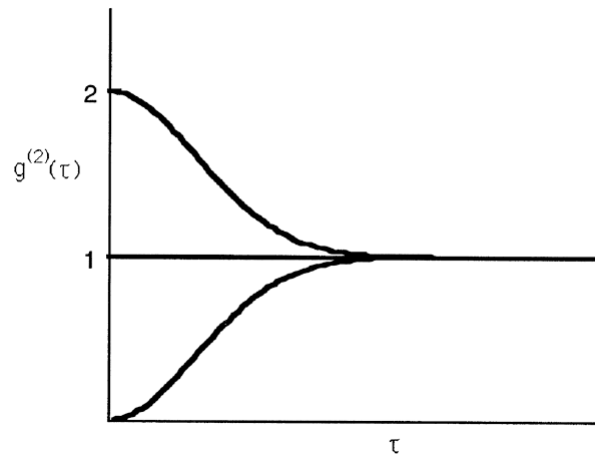


Figura 15.2: Gráfico esquemático dos fenômenos bunching (curva superior), anti-bunching (curva inferior) e o estado de luz coerente (linha reta no meio). Extraído de [2].

⁹Geralmente fotodiodos de avalanche, ou no inglês *avalanche photodiode* - APD.

¹⁰Geralmente chamado de *Time-correlated single photon counting system* - TCSPC.

Além dos casos descritos na figura 15.2, existem processos em que $g^{(2)}(0) > 2$. Nestes casos, a desigualdade de Schwarz para as funções correlação (§15.8.1) é violada, o que demonstra que estados deste tipo são puramente quânticos, não tendo análogos clássicos.¹¹ Um exemplo é mostrado na figura 15.3. O gráfico mostra um histograma de contagens de dois fótons em função do tempo de chegada τ entre eles. Note que praticamente só há contagem em $\tau = 0$, de forma que valores da ordem de $g^{(2)}(0) \sim 10^3$ foram medidos. Este alto valor de correlação de segunda ordem se dá porque os fótons medidos são gerados aos pares, em processos de espalhamento inelástico da luz onde dois fótons do laser trocam energia em um meio material e saem com energias deslocadas, um para menores energias (espalhamento Stokes) e outro para maiores energias (espalhamento anti-Stokes).

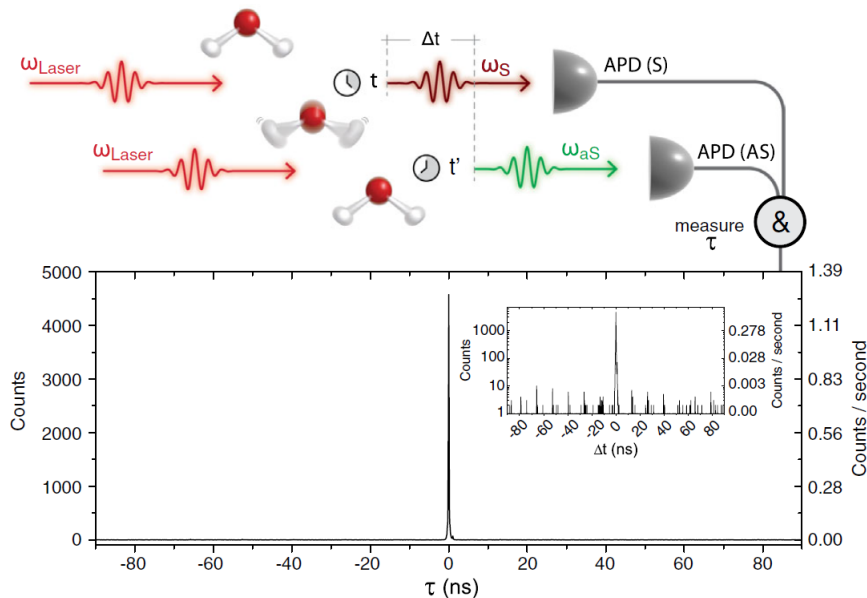


Figura 15.3: Processo de espalhamento inelástico Stokes (S) e anti-Stokes (aS) de luz correlacionados. Dois fótons vindos do laser trocam energia através de vibrações das moléculas de água, saindo com energias deslocadas, um para baixo ($\omega_S = \omega_{\text{Laser}} - \omega_{\text{phonon}}$) e o outro para cima ($\omega_{aS} = \omega_{\text{Laser}} + \omega_{\text{phonon}}$). O gráfico mostra o histograma de contagens de pares de fótons em função da diferença de tempo τ entre suas chegadas nos detectores (APDs). Extraído de [49].

¹¹Mais sobre o caráter não clássico fundamental da mecânica quântica será tratado no capítulo 16.

15.10 Exercícios

Exercício 15.1 *Demonstre a equação (15.79).*

Exercício 15.2 *Resolva os exercícios do livro do Ballentine [2].*