

Parte II

Parte 2 - Aplicações

Capítulo 11

Partícula carregada em um campo magnético

Nesse capítulo discutiremos como tratar uma partícula carregada sujeita a um campo magnético no contexto da mecânica quântica. A abordagem quântica é necessária para o tratamento correto do efeito do campo magnético, por exemplo nos níveis de energia do átomo, como no efeito Zeeman. O Prêmio Nobel de Física de 1902 foi concedido em conjunto a Hendrik Antoon Lorentz e Pieter Zeeman “em reconhecimento ao extraordinário serviço prestado por suas pesquisas sobre a influência do magnetismo sobre os fenômenos da radiação”. O tratamento quântico explica também fenômenos como o efeito Hall quântico (veja Fig. 11.1), descoberta que deu ao pesquisador Klaus von Klitzing o Prêmio Nobel de Física em 1985,¹ e o efeito Aharonov-Bohm, que deu aos pesquisadores Yakir Aharonov e David Bohm o Prêmio Wolf de 1998. Estes fenômenos serão tratados neste capítulo. Entretanto, para dar início a essa discussão é interessante considerar a teoria do eletromagnetismo clássica para relembrar os conceitos e para discutirmos a questão da realidade física de campos e potenciais.

¹O prêmio Nobel de von Klitzing refere-se ao chamado efeito Hall quântico inteiro. O Prêmio Nobel de Física de 1998 foi concedido em conjunto a Robert B. Laughlin, Horst L. Störmer e Daniel C. Tsui “pela descoberta de uma nova forma de fluido quântico com excitação fracionalmente carregada”, o chamado efeito Hall fracionário.

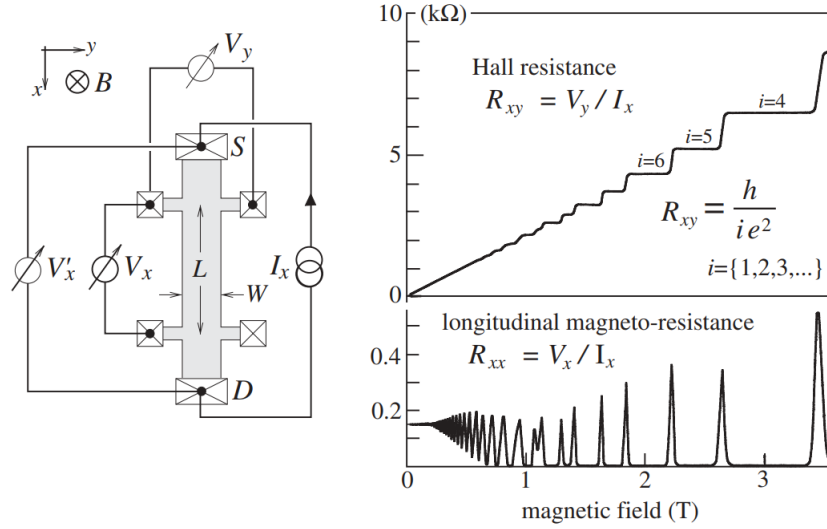


Figura 11.1: Curva de resistência Hall e curva de magneto-resistência longitudinal medida em um sistema eletrônico bidimensional. A geometria da barra Hall e a respectiva configuração elétrica são mostradas à esquerda. Extraído de [30].

11.1 Teoria clássica

Classicamente podemos obter os campos elétrico e magnético através de duas grandezas, chamados potenciais. Uma delas é o potencial escalar, denotado por φ , e a outra é o potencial vetor, denotado por \mathbf{A} . A partir destes potenciais podemos calcular os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} :

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (11.1)$$

Para especificar \mathbf{E} e \mathbf{B} simultaneamente precisamos fornecer as três componentes do vetor campo elétrico e as três componentes do vetor campo magnético, ou seja, seis números (ou funções) reais. Porém, quando especificamos os potenciais escalar e vetor fornecemos apenas quatro números (ou funções), o próprio potencial escalar e as três componentes do potencial vetor. Este desbalanço nos graus de liberdade está ligado a chamada **liberdade de calibre**. Considere a seguinte transformação (chamada **transformação de calibre**):

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad (11.2)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (11.3)$$

com χ uma função arbitrária. Essa mudança nos potenciais não altera os campos elétrico e magnético. Isso serve de argumento para identificar os campos elétrico e magnético como sendo as quantidades físicas do sistema, considerando os potenciais apenas como construções matemáticas.

Sabemos, do eletromagnetismo clássico, que a força que uma partícula de carga q e massa M sofre quando colocada em uma região de campos elétrico e magnético é dada pela expressão da força de Lorentz:

$$\mathbf{F} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c), \quad (11.4)$$

que pode ser obtida a partir da função lagrangiana:

$$L = \frac{Mv^2}{2} - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad (11.5)$$

A partir da lagrangiana podemos calcular o momento canônico $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha}$ que para o caso clássico fornece o seguinte resultado:

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}. \quad (11.6)$$

Na presença de campos magnéticos, o quantidade que se conserva não é mais apenas $M\mathbf{v}$, mas o momento canônico (11.6). Com esse momento podemos calcular a função hamiltoniana

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L = \frac{1}{2}Mv^2 + q\phi(\mathbf{x}, t), \quad (11.7)$$

que não apresenta o potencial vetor pois os termos se cancelam. Este resultado é fisicamente consistente porque a força magnética é perpendicular à direção do movimento e não modifica a energia total do sistema. Entretanto, esta formulação é inadequada para a descrição do movimento da partícula na presença do campo, e (11.7) pode ser reescrita substituindo v por \mathbf{p} utilizando (11.6). Em termos do momento, ficamos com:

$$H = \frac{1}{2M} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi. \quad (11.8)$$

Note que não há mais a separação explícita de energia cinética + energia potencial para a hamiltoniana, pois aparecerão termos cruzados de momento e de potencial vetor.

11.2 Teoria quântica

Do que construímos na seção anterior, duas equações permanecem válidas (mantendo em mente que agora estamos falando de operadores): as equações (11.6) e (11.8), que são equivalentes às equações (3.60) e (3.61), respectivamente, estas últimas tendo sido obtidas como formas específicas dos geradores de simetria do grupo de Galileu (§3.5). Isso significa, então, que os potenciais escalar e vetor (quânticos) são funções do operador posição e do tempo. O momento que calculamos anteriormente agora é interpretado como o operador momento e é uma função do operador velocidade e do potencial vetor.

O operador velocidade, por outro lado, definido na equação (3.54) é dado por:

$$V_\alpha = \frac{i}{\hbar}[H, Q_\alpha] = \frac{1}{M}\left(P_\alpha - \frac{q}{c}A_\alpha\right). \quad (11.9)$$

Porém a presença dos campos elétrico e magnético tornam as relações de comutação mais complicadas:

$$[Q_\beta, V_\alpha] = i\frac{\hbar}{M}\delta_{\alpha\beta}, \quad (11.10)$$

$$[V_x, V_y] = \frac{[P_x, P_y]}{M^2} + \left(\frac{q}{Mc}\right)^2 [A_x, A_y] - \frac{q}{M^2c}\{[A_x, P_y] + [P_x, A_y]\}. \quad (11.11)$$

Os dois primeiros termos se anulam (as componentes de \mathbf{P} e as de \mathbf{A} comutam entre si). Os dois últimos termos podem ser avaliados na representação de coordenadas ao calcularmos a atuação desse comutador em uma função de onda $\psi(x, tyz)$. Com isso, encontramos:

$$[V_x, V_y]\psi = i\frac{\hbar q}{M^2c}B_z\psi, \quad (11.12)$$

como ψ é arbitrário esse resultado vale no caso geral:

$$[V_\alpha, V_\beta] = i\frac{\hbar q}{M^2c}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma. \quad (11.13)$$

Podemos calcular, agora, o operador força, definido como sendo o produto da massa pelo operador aceleração. A forma de fazer isso é considerar a equação de movimento de Heisenberg para V_α :

$$M\frac{dV_\alpha}{dt} = \frac{iM}{\hbar}[H, V_\alpha] + M\frac{\partial V_\alpha}{\partial t}, \quad (11.14)$$

usando a forma do hamiltoniano como sendo $H = \frac{M}{2}\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + q\varphi$ encontramos:

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{q}{2c}(\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{V}) + q\mathbf{E}, \quad (11.15)$$

que é a força de Lorentz. O termo entre parênteses não pode ser simplificado mais, pois, como \mathbf{B} é função do operador posição, ele não comuta com \mathbf{V} .

Podemos considerar o hamiltoniano (11.8) após realizar a expansão dos termos do quadrado. Com isso chegamos em:

$$H = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} - (q/c)(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}) + (q^2/c^2)\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}{2M} + q\varphi, \quad (11.16)$$

note que não podemos usar a expansão do quadrado perfeito pois, no caso geral, \mathbf{A} não comuta com \mathbf{P} . Podemos usar a representação de coordenadas e calcular os produtos dentro do segundo parênteses em relação a uma função arbitrária $\psi(\mathbf{x})$ para encontrarmos:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = -i\hbar \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (11.17)$$

note que, com essa expressão, teremos a comutatividade de \mathbf{A} e \mathbf{P} garantida se, por exemplo, fixarmos $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Essa escolha para o divergente do potencial vetor, conhecida no eletromagnetismo como **calibre de Coulomb**, consiste numa fixação (ou numa escolha) do calibre que iremos usar para tratar o problema e simplificar os cálculos.

Para simplificar a notação é comum escrevermos o hamiltoniano da equação (11.8), na representação de coordenadas, da seguinte forma:

$$H = \frac{1}{2M} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\varphi. \quad (11.18)$$

Por fim, precisamos entender como funcionam as transformações de calibre em mecânica quântica. Conforme comentamos no capítulo 3, qualquer simetria do sistema deve ser tal que deixa invariante a densidade de probabilidade em dois sistemas de referência diferentes. A simetria de calibre é um exemplo de simetria (similarmente àquelas implementadas pelo grupo de Galileu) e, portanto, deve deixar invariante as probabilidades medidas em M.Q. Para isso ser verdade, as transformações de calibre devem ser tais que:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (11.19)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (11.20)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i(q/\hbar c)\chi}, \quad (11.21)$$

ou seja, em M.Q., a função de onda ganha uma fase quando ocorre uma transformação de calibre.

Note ainda que no caso aqui em pauta, $\langle \psi | \mathbf{P} | \psi \rangle$ não é invariante às transformações de simetria, mas $\langle \psi | \mathbf{V} | \psi \rangle = \langle \psi | (\mathbf{P}/M + q\mathbf{A}/Mc) | \psi \rangle$ sim. Um cálculo de fluxo de probabilidade $\vec{J}(\vec{x}, t)$ (§4.4) também deve considerar a expressão correta na presença de campo vetor (Eq.(4.27)).

11.3 Movimento em um campo magnético estático e uniforme

Para essa seção consideremos que há numa região do espaço um campo magnético uniforme e estático na direção z : $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Para tratar esse problema é comum escrevermos o hamiltoniano da equação (11.8) em termos das velocidades nas direções cartesianas:

$$H = H_{xy} + H_z, \quad (11.22)$$

com:

$$H_{xy} = \frac{1}{2}M(V_x^2 + V_y^2), \quad H_z = \frac{1}{2}MV_z^2, \quad (11.23)$$

essa definição de H é possível pois V_z comuta com as outras componentes para as quais $B_x = B_y = 0$ e, então, os autovetores de H serão autovetores simultâneos de H_{xy} e H_z . Introduzindo as definições:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\hbar|q|B}{M^2c}}, \quad V_x = \gamma Q', \quad V_y = \gamma P', \quad (11.24)$$

obtemos, então:

$$H_{xy} = \frac{\hbar|q|B}{2Mc} (Q'^2 + P'^2), \text{ com } Q'P' - P'Q' = i, \quad (11.25)$$

que é formalmente equivalente à solução do oscilador harmônico quântico (Eqs. (6.6) e (6.5))². Portanto, os autovalores de H_{xy} serão: $E_{xy} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar|q|B}{Mc}$. Os autovalores de H_z são mais fáceis de ser exibidos e são os mesmos de V_z . Assim chegamos em:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar|q|B}{Mc} + \frac{1}{2}Mv_z^2. \quad (11.26)$$

A primeira consequência importante desse resultado é que o movimento em xy é desacoplado do movimento em z . No plano xy o movimento clássico análogo é uma órbita circular com frequência angular $\omega_c = qB/Mc$ (chamada de *frequência cíclotron*). No caso quântico esse movimento periódico é quantizado em energias discretas relacionadas aos orbitais conhecidos como níveis de Landau, cuja separação é de $|\hbar\omega_c|$. Uma visão geométrica dos níveis de Landau requer encontrar os autoestados. Entretanto, para isto é necessário

² Q' e P' foram introduzidos aqui para chegar a uma equação formalmente análoga à do oscilador harmônico, mas não devem ser assumidos como operadores posição e momento.

definir um sistema de coordenadas particular e a forma do vetor potencial. Por esta razão a interpretação geométrica dos níveis de Landau não é trivial.

Em campos magnéticos fracos, a existência dos níveis de Landau dá origem a muitas “oscilações quânticas”, como as oscilações de Shubnikov-de Haas³ e o efeito de Haas-van Alphen⁴. Para campos magnéticos fortes, cada nível de Landau é altamente degenerado. Especificamente, para uma amostra da área A , no campo magnético B , a degenerescência de cada nível de Landau é

$$N = g_s \frac{BA}{\phi_0}, \quad (11.27)$$

onde g_s representa um fator de 2 para a degenerescência de spin e $\phi_0 = hc/q \approx 2 \times 10^{-15}$ Wb é o quantum de fluxo magnético, ou seja, a degenerescência é igual ao número de quanta de fluxo magnético multiplicado por 2 para o caso do elétron. Para campos magnéticos suficientemente fortes, cada nível de Landau pode ter tantos estados que todos os elétrons livres no sistema estão em apenas alguns desses níveis: é nesse regime que se observa o efeito Hall quântico (Figura 11.1).

Como mostrado na Figura 3.1 (§3.5.1.), o ampere, que é a unidade de corrente elétrica no Sistema Internacional de Unidades (SI), foi atrelado aos valores da carga do elétron e (veja tabela 3.2). Isto foi definido em 2018, na Conferência Geral sobre Pesos e Medidas (CGPM). Acordou-se que, a partir de 20 de maio de 2019, a medida de corrente elétrica passaria a ser definida de tal forma que a carga elementar seria igual a $1.602176634 \times 10^{-19}$ C.

Experimentalmente, uma das formas de definir 1 ampere é considerando que $1A = 1V/1\Omega$, e utilizando o efeito Hall, que tem a importante propriedade de ser extremamente preciso, para definir 1Ω (o Volt é definido pelo efeito Josephson). As medições reais da condutância Hall (inverso da resistência) foram encontradas como sendo números inteiros ou fracionários de e^2/h , com definição de uma parte em um bilhão. Esse fenômeno, referido como quantização exata, tem se mostrado uma manifestação sutil do princípio da invariância de calibre [31], e permitiu a definição de um novo padrão prático de resistência elétrica, baseado no quantum de resistência dado pela constante de von Klitzing $R_K = h/e^2 = 25812.807557(18)\Omega$. Desde 1990, um valor convencional fixo R_{K-90} tem sido usado em calibrações de resistência em todo o mundo. Em 16 de novembro de 2018, o valor convencional foi

³Oscilação na condutividade de um material que ocorre a baixas temperaturas na presença de campos magnéticos muito intensos, utilizado para medir a massa efetiva de portadores de carga.[?]

⁴Variação periódica de suscetibilidade diamagnética dos elétrons da banda de condução de certos metais que ocorre a baixas temperaturas, utilizado para mapear a superfície de Fermi de metais.[?]

revogado em consequência da decisão de fixar os valores de h (a constante de Planck) e (a carga elementar) na 26ª reunião da Conferência Geral sobre Pesos e Medidas. O efeito Hall quântico também fornece uma determinação independente extremamente precisa da constante de estrutura fina, uma quantidade de importância fundamental na eletrodinâmica quântica.

O grafeno, cuja descoberta deu origem ao prêmio Nobel de 2010, em princípio, é um material ideal para um padrão de resistência quântica, porque é inerentemente bidimensional e seus níveis discretos de energia eletrônica em um campo magnético (os níveis de Landau) são largamente espaçados por causa da grande velocidade de Fermi de seus elétrons de condução [32].

11.4 Efeito Aharonov-Bohm

Conforme comentamos na seção 11.1, na teoria clássica, é bastante comum assumir que os potenciais escalar e vetor não possuem significado físico, quem os possui são os campos elétrico e magnético. Entretanto, em mecânica quântica a função de onda de um sistema que sofre uma transformação de calibre é alterada por uma fase e esse fator de fase manifesta-se em fenômenos de interferência.

Os primeiros a perceberem esse “problema” foram Aharonov e Bohm, num efeito que hoje leva o seus nomes [33]. Para analisar melhor o fenômeno, consideremos a figura 11.2. No ponto a existe uma fonte de partículas carregadas que são atiradas em uma fenda dupla e, após sofrerem interferência, atingem o ponto b . Um solenoide cilíndrico (idealmente infinito) é colocado atrás da fenda dupla, perpendicularmente ao plano do experimento, em uma região que não é atingida pelas partículas e com uma blindagem impenetrável para partículas carregadas. Dentro desse solenoide é possível criar um campo magnético enquanto que a região do lado de fora possui campo nulo.

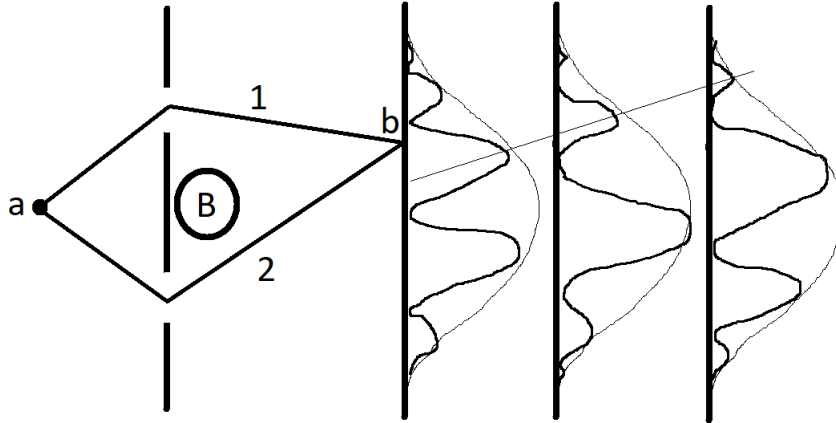


Figura 11.2: Efeito Aharonov-Bohm. As partículas emitidas em *a* atravessam um anteparo tipo fenda-dupla e formam um perfil de interferência no anteparo. O perfil de interferência desloca com a variação de um campo magnético *B* dentro de um solenóide infinito, mesmo que as partículas não passem na região onde existe o campo.

Seja $\Psi(x, t)^{(0)}$ a solução da equação de Schrödinger para o caso de campo nulo. No caso onde o campo é não nulo, o potencial vetor \mathbf{A} , que serve para achar \mathbf{B} na região interna ao cilindro, será diferente de zero em todo o espaço. Trabalhando as duas regiões (esquerda e direita, *L* e *R* na figura) separadamente e devido ao acréscimo de uma fase na função de onda por causa de transformações de calibre teremos, no ponto *b*:

$$\Psi(b) = \Psi_L^{(0)} e^{i(q/\hbar c)\Lambda_1} + \Psi_R^{(0)} e^{i(q/\hbar c)\Lambda_2}, \quad (11.28)$$

com $\Lambda_1 = \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ sendo o ganho de fase devido ao caminho na região *L*. Λ_2 é o mesmo só que para o caminho na região *R*. Então o padrão de interferência percebido em *b* dependerá da diferença de fase $\Lambda_1 - \Lambda_2$ que, por sua vez, dependerá do fluxo de campo magnético no interior do cilindro:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{x} = \iint (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \Phi_B, \quad (11.29)$$

Note a estranheza desse resultado, que posteriormente foi confirmado experimentalmente. O padrão de interferência depende efetivamente do campo magnético em uma região do espaço na qual não passa nenhuma partícula. Se mantivermos a premissa de que os potenciais não têm realidade física, temos que apelar para efeitos não locais nas funções de onda. Entretanto,

este resultado pode ser visto como evidência de que os potenciais possuem realidade física e que, conseqüentemente, podem interferir nos resultados dos experimentos.

11.5 Efeito Zeeman

O efeito Zeeman, descoberto originalmente em 1896, consiste na separação de níveis de energia de estados atômicos devido à aplicação de um campo magnético, que tende a orientar os momentos de dipolo magnético presentes no átomo. Consideremos um campo magnético estático e uniforme e, por simplicidade, desconsideremos o spin, sendo o único momento magnético presente aquele relacionado ao momento angular orbital \mathbf{L} do elétron. Como estamos tratando de átomos, devemos incluir o potencial esfericamente simétrico $W(r)$ do átomo e, assim, o hamiltoniano da equação (11.8) fica:

$$H = \frac{1}{2M} \left(\mathbf{P} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + W(r) = \frac{P^2}{2M} + \frac{e}{Mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \frac{e^2 A^2}{2Mc^2} + W(r), \quad (11.30)$$

em que se adotou o calibre de Coulomb ($\text{div} \mathbf{A} = 0$, que leva a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$, ver (11.17)). Para continuar, precisamos escolher uma forma para \mathbf{A} (que não é única) que gere o campo de interesse: $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{x})$. Com isto, obtemos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$, o que leva a:

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{e}{2Mc} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} + \frac{e^2}{8Mc^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{x})^2 + W(r). \quad (11.31)$$

Para campos suficientemente fracos, o hamiltoniano pode ser reescrito como:

$$H = H_a + \frac{e}{2Mc} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} + \frac{e^2}{8Mc^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{x})^2, \quad (11.32)$$

em que $H_a = \frac{P^2}{2M} + W(r)$ é o hamiltoniano do átomo livre, cuja solução já nos é conhecida, dada pelas funções de onda ψ_{nlm} através da solução analítica da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio (ver §10.2), e os outros termos serão considerados como perturbação.

Se o campo for fraco o suficiente (ao menos numa aproximação de primeira ordem) para desprezarmos ordens iguais ou superior a B^2 e considerarmos o campo ao longo de z , então podemos desprezar o último termo e teremos que ψ_{nlm} também será solução de H . Isso nos dará a seguinte correção em primeira ordem de perturbação:

$$E_{nlm}^{(1)} = \frac{e\hbar B}{2Mc} m, \quad (11.33)$$

sendo m o número quântico azimutal. A linearidade de $E_{nlm}^{(1)}$ em m é uma evidência da separação dos níveis de energia através da presença do campo magnético \mathbf{B} . A degenerescência dos $(2l + 1)$ níveis de energia (ver §7.1, eq.(7.16)) é quebrada pela presença do campo magnético externo que reorienta os momentos magnéticos orbitais de acordo com o valor de l .

Este tratamento exemplifica bem o efeito, mas para uma melhor descrição dos níveis atômicos, o spin do elétron deve ser considerado, e o termo $\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$ deve dar lugar a $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S})$. Além disso, a interação spin-órbita dá origem a um termo $H_{s-o} \propto \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$, e considerar o campo externo como perturbação ou não depende do valor deste campo em comparação com os campos internos agindo no spin. No caso de campo externo fraco, os estados não perturbados devem considerar H_{s-o} e os números l e m deixam de ser bons números quânticos, dando lugar aos números quânticos relacionados aos operadores momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ e sua componente \mathbf{J}_z , j e m_j , respectivamente. De qualquer forma, é comum se trabalhar com as situações assintóticas (campo muito fraco ou campo muito forte), evitando a situação intermediária por sua dificuldade de análise [34].

11.6 Exercícios

Exercício 11.1 Prove que as transformações de calibre equações (11.2) e (11.3) deixam invariantes as expressões para os campos elétrico e magnético, equação (11.1).

Exercício 11.2 Use as equações de Euler-Lagrange para provar que a lagrangiana clássica da equação (11.5) gera a equação da força de Lorentz, equação (11.4).

Exercício 11.3 Prove a relação para o momento canônico, (11.6).

Exercício 11.4 Obtenha a hamiltoniana, equação (11.8), a partir da lagrangiana, equação (11.5).

Exercício 11.5 Prove a expressão da velocidade, equação (11.9).

Exercício 11.6 Resolva os exercícios do livro do Ballentine, [2].

