Apêndice A

Autovalores e autovetores de uma matriz

Considere uma transformação linear $T : V \to V$, sendo V um espaço vetorial. Essa transformação admite uma representação como uma matriz quadrada. Em outras palavras, T denota tanto a transformação linear em si quanto a sua matriz. Seja $v \in V$, um elemento do espaço vetorial V.

Podemos nos perguntar: existe um escalar λ tal que a seguinte equação:

$$Tv = \lambda v \tag{A.1}$$

é válida?

A equação acima é chamada de **equação de autovalores**. O conjunto dos vetores v que satisfazem essa equação, para um dado λ, são chamados de **autovetores**. Já as constantes λ são chamadas de **autovalores**.

Em MQ normalmente estamos interessados em obter os autovalores de um operador de interesse. A esse procedimento damos o nome de "obtenção do **espectro** do operador". Em linguagem matemática, um operador é uma transformação linear entre dois espaços idênticos, com o caso particular de estarmos tratando de espaços de Hilbert que podem envolver estruturas mais complexas do que aquelas que vemos em álgebra linear.

Como v é um vetor e λ é um escalar, podemos usar que $v = \mathbf{I}v$ e aí encontramos a seguinte equação:

$$(T - \lambda\mathbf{I})v = 0, \tag{A.2}$$

e a resolução desse sistema linear nos dará todos os autovalores da matriz T. Existe, porém, uma forma ainda mais simples de se obter os autovalores de uma matriz.

Proposição: $\rho = \det(T - \lambda\mathbf{I})$ é um polinômio de mesmo grau da dimensão de T. Ele é chamado **polinômio característico**.

Desta proposição podemos tirar um importante teorema:

Teorema 11 *As raízes do polinômio característico de uma matriz de transformação T são os autovalores de T.*

Este teorema tem a impotância prática de nos permitir construir os autovalores de uma matriz de forma direta apenas calculando-se as raízes do polinômio característico.

Após calcularmos as raízes do polinômio característico calculamos, para cada uma dessas raízes, as possíveis soluções para v da equação (A.2). Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 23 *Calcule os autovalores e autovetores de* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Conforme comentamos, primeiro precisamos achar as raízes do polinômio característico:

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0, \tag{A.3}$$

calculando o determinante encontramos:

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1, \ \lambda = 3. \tag{A.4}$$

Agora calculamos os autovetores. Começando com $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

em que colocamos um autovetor genérico $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associado ao autovalor $\lambda = 1$.

Resolvendo o sistema acima encontramos: $a = -b$. Como eles são arbitrários, podemos colocar, por simplicidade, $a = 1$, logo:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

é o primeiro autovetor. Não podemos colocar $a = 0$ pois teríamos $b = 0$ e não se pode admitir autovetores nulos (pois o sistema homogêneo da equação (A.2) não terá solução).

Agora calculamos o segundo autovetor para $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.7}$$

em que colocamos um autovetor genérico $w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Resolvendo o sistema acima encontramos: $c = d$. Como eles são arbitrários, podemos colocar, por simplicidade, $a = 1$, logo:

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{A.8}$$

que é o último autovetor. Em MQ é necessário que os autovetores sejam normalizados e, para isso, calculamos:

$$||v|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad ||w|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \tag{A.9}$$

e dividimos os autovetores por estes números, ficando com:

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A.10}$$

Procedimentos como esse serão comuns em MQ. É através desse método que podemos obter o espectro de operadores lineares em dimensão finita, que possuem interesse físico.