

# Capítulo 16

## Teorema de Bell e suas consequências

### 16.1 O argumento de Einstein, Podolsky e Rosen

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen [50] levantaram a seguinte questão, que leva o nome do seu artigo: “A descrição quanto-mecânica da realidade física pode ser considerada completa?”

Para Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) uma descrição completa consiste em que qualquer elemento da realidade física possui uma contraparte numa teoria física. Se, portanto, houverem elementos da realidade que não puderem ser descritos por uma teoria física, esta deveria ser considerada incompleta.

Na tentativa de justificar esse argumento, EPR consideraram um sistema de duas partículas um estado tal que a posição relativa,  $x_1 - x_2$ , e o momento total  $p_1 + p_2$  têm valores definidos.<sup>1</sup> Após a preparação do estado, não há nenhuma interação entre as partículas.

Ao se medir a posição da partícula 1, poderemos prever a posição da partícula 2 com certeza, pois ambas estão separadas no espaço e não interagem. A medida na partícula 1 não afeta a medida na partícula 2, e vice versa. Isso nos permite dizer que a posição da partícula 1 é um elemento da realidade. A mesma lógica serve para as medições de momento.

Por hipótese, como não há interação, não há nenhuma razão física (do ponto de vista teórico) para se aceitar o fato de que medições na partícula 1 afetem a partícula 2. Por isso, não há meios para se inferir a posição (ou o momento) da partícula 2, os quais já concluímos serem elementos da

---

<sup>1</sup>Note que enquanto  $[x, p] = i\hbar$ ,  $[x_1 - x_2, p_1 + p_2] = 0$

realidade. Portanto, a teoria da MQ é **incompleta**: os elementos físicos posição e momento da partícula 2 não possuem suas contrapartes na teoria física (pois, em MQ,  $x_2$  e  $p_2$  não comutam, logo não é possível medir ambos simultaneamente).

Fica claro que a proposta de EPR era criticar a interpretação da MQ, utilizando-se da própria teoria quântica para construir um exemplo que a derrubava. Esse exemplo, em particular, envolvia o conceito de **localidade**, obviamente motivado pela relatividade restrita do próprio Einstein.

Porém, sem darem-se conta, EPR inauguraram todo um ramo da física contemporânea, que consiste na **informação quântica**. Retornaremos nesse assunto no próximo capítulo. Por enquanto veremos as consequências do paradoxo EPR e as inúmeras descobertas que se seguiram disto.

## 16.2 Correlações de spin

O experimento proposto por EPR é impraticável. Não é simples preparar o estado inicial proposto por eles e nem tampouco manter o sistema no estado de diferença de posições, porque esse estado é de existência transitória. Um experimento mais realista, ilustrando o mesmo princípio, foi proposto por Bohm. Ele propôs um experimento com dois átomos, ambos com spin  $s = 1/2$ , preparados num estado tal que o spin total fosse nulo. O vetor de estado de singleto é da forma:

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle), \quad (16.1)$$

em que  $|\pm\rangle$  denota “spin-up” e “spin-down”, respectivamente, com respeito a algum sistema de coordenadas. Mesmo que o estado orbital não seja estacionário as interações não envolvem spin logo o estado de spin do sistema não mudará. A seguir separamos as duas partículas e medimos a componente  $z$  do spin da partícula 1. Como o spin total é zero, podemos prever com certeza qual é o spin da partícula 2 sem nenhuma interferência nela. Por causa disso,  $\sigma_z^{(2)}$  é um elemento da realidade, como no argumento EPR.

Como o sistema é invariante por rotações e não há direção preferencial de quantização do spin logo poderíamos medir a componente  $x$  ou a componente  $y$  igualmente, usando esse fato para argumentar que  $\sigma_x^{(2)}$  e  $\sigma_y^{(2)}$  ou qualquer outra componente arbitrária de spin são elementos da realidade e, portanto, a MQ não é uma descrição completa da realidade física.

Nenhum avanço significativo foi feito até John Bell, em 1964 [10]. Ele considerou a correlação entre os operadores de spin em uma direção arbitrária. Seja  $\sigma_a = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$  e  $\sigma_b = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}$  duas direções arbitrárias que usaremos para

medir o spin de ambas partículas, respectivamente. A correlação no estado de singleto é:

$$\langle \Psi_0 | \sigma_a \otimes \sigma_b | \Psi_0 \rangle = -\cos(\theta_{ab}), \quad (16.2)$$

em que  $\theta_{ab}$  é o ângulo medido entre ambas direções  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Essa demonstração de Bell entra em conflito com o argumento de localidade de EPR. Na próxima seção examinaremos os argumentos de Bell com mais detalhes mas, antes disso, veremos um argumento mais simples, proposto por N. Herbert [51].

Idealizaremos o estado de singleto como sendo um gerador de sinais correlacionados e dois sistemas de medida de spin que são usados como detectores desses sinais. O detector A mede a componente do spin da partícula 1 na direção  $\mathbf{a}$  e o detector B faz o mesmo para a partícula 2.

Quando os detectores estão alinhados na mesma direção,  $\theta_{ab} = 0$ , as duas detecções serão idênticas por causa da correlação da equação (16.2). Se o detector B for rodado de um ângulo  $\theta$  então a razão de desacordo entre ambos detectores será

$$d(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta). \quad (16.3)$$

Agora introduziremos uma forma de **localidade** no problema, assumindo que qualquer mudança na detecção em B é devido a mudanças única e exclusivamente em B, e não dependem da orientação do outro detector A separado espacialmente de B. Então a rotação de B num ângulo  $\theta$  é tal que introduz uma correção  $d(\theta)$  na detecção em B. Se o detector A também é rodado em  $\theta$  tal que  $\theta_{ab} = 0$  então esse também sofrerá uma correção de  $d(\theta)$  mas, nesse caso, ambas correções se cancelam e as detecções coincidem.

Considere, agora, uma rotação de  $2\theta$  no detector B, tal que a correção a ser introduzida é de  $d(2\theta)$ . Isso deve ser equivalente a duas correções sucessivas de  $\theta$  mas, como algumas dessas correções se cancelam, deve valer que:

$$d(2\theta) \leq 2d(\theta). \quad (16.4)$$

Esse é um resultado derivado unicamente pelo princípio de localidade. Substituindo a expressão quanto-mecânica para a correção, equação (16.3), encontramos:

$$1 - \cos(2\theta) \leq 2 - 2\cos(\theta), \quad (16.5)$$

rearranjando:

$$2\cos(\theta) - \cos(2\theta) \leq 1, \quad (16.6)$$

essa desigualdade é violada, por exemplo, no intervalo  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ . Em  $\theta = \pi/4$  temos  $2\cos(\pi/4) - \cos(\pi/2) = \sqrt{2} > 1$ . O fato dessa desigualdade ser violada indica que os princípios de MQ (usados para derivar (16.3)) não estão de acordo com princípios de localidade, usados para derivar a relação  $d(2\theta) \leq 2d(\theta)$ . Discutiremos melhor esses pormenores na seção seguinte.

### 16.3 Desigualdades de Bell

Considere um sistema de dois componentes e um par de instrumentos que podem medir variáveis de dois valores em cada componente. Chamaremos os componentes de partículas, embora esse nome seja apenas genérico. O resultado das possíveis medidas em cada componente é  $\pm 1$ .

Cada instrumento possui um conjunto de parâmetros controláveis  $\mathbf{a}$  para o primeiro instrumento e  $\mathbf{b}$  para o segundo, além de um conjunto de parâmetros não controláveis denotados por  $\lambda$ . Assim o resultado da medição na primeira partícula será uma função  $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1$ . E, de forma análoga, para a segunda partícula  $B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$ .

De acordo com o princípio de localidade de Einstein, o resultado da medida na primeira partícula não ser influenciada pelo aparato de medida  $a$  do primeiro instrumento assim como o resultado da medida na segunda partícula não ser influenciada pelo aparato de medida  $b$  do segundo instrumento. Por isso, funções do tipo  $A(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda)$  e  $B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda)$ , não podem existir.

Queremos estudar as correlações entre os resultados das medidas nas duas partículas. O parâmetro não-controlável  $\lambda$  está sujeito a alguma distribuição de probabilidade  $\rho(\lambda)$ , de tal forma que para configurações dos instrumentos pré-fixadas, a função de correlação é da forma:

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda, \quad (16.7)$$

em que  $\rho(\lambda) \geq 0$  e  $\int \rho(\lambda)d\lambda = 1$ . Consideremos agora duas configurações diferentes para o primeiro instrumento,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}'$ , e também duas configurações diferentes para o segundo instrumento,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{b}'$ . Então:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}') &= \int [A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda \\ &= \int [A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)\{1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)\}] \rho(\lambda)d\lambda \\ &\quad - \int [A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)\{1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)\}] \rho(\lambda)d\lambda, \end{aligned} \quad (16.8)$$

usando as condições:

$$|A(\mathbf{a}, \lambda)| \leq 1, \quad |B(\mathbf{b}, \lambda)| \leq 1, \quad (16.9)$$

encontramos:

$$\begin{aligned} |C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| &\leq \int [1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda + \int [1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda \\ &= 2 \pm |C(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + C(\mathbf{a}', \mathbf{b})|, \end{aligned} \quad (16.10)$$

reescrevendo:

$$|C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + |C(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + C(\mathbf{a}', \mathbf{b})| \leq 2, \quad (16.11)$$

esse resultado é conhecido como a **desigualdade de Bell**.

A demonstração da desigualdade de Bell não faz uso de nenhum princípio de mecânica quântica, apenas alguns postulados simples e o princípio de localidade de Einstein.

Conforme calculamos na seção anterior, para os aparatos de medida de spin, podemos escolher as direções dos vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}'$  e  $\mathbf{b}'$  de tal forma que a desigualdade de Bell reproduzirá exatamente o mesmo resultado da equação (16.6). Conforme vimos, há uma larga classe de valores de  $\theta$  que violam aquela desigualdade e, portanto, a mecânica quântica é um exemplo de violação da desigualdade de Bell.

Essa violação ocorre por causa de algum conflito existente entre a MQ e as hipóteses usadas para se derivar a desigualdade de Bell. A prova de que tal conflito realmente existe é conhecido como **teorema de Bell**.

A estrutura simples em que foi construída permite a desigualdade de Bell ser testada experimentalmente. O procedimento experimental não envolve estados de singleto mas, sim, estados de dois fótons que possuem as mesmas características. O valor experimental da correlação é dado por:

$$C_{\text{exp}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{N_{++} + N_{--} - N_{+-} - N_{-+}}{N}, \quad (16.12)$$

em que  $N_{++}$  é o número de vezes que ambos instrumentos marcaram +1,  $N_{+-}$  é o número de vezes que o primeiro marcou +1 e o segundo marcou -1 e assim sucessivamente. Devido a estrutura e qualidade dos detectores atuais, não é possível saber o valor exato da correlação experimental, pois há partículas que não são detectadas. Supondo, porém, que as partículas que são detectadas formam uma amostra estatisticamente representativa de toda a população de partículas emitidas, podemos comparar a quantidade:

$$C + \text{exp}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{N_{++} + N_{--} - N_{+-} - N_{-+}}{N_{++} + N_{--} + N_{+-} + N_{-+}}, \quad (16.13)$$

com as predições teóricas e a maioria dos experimentos até agora tiveram acordo com a mecânica quântica e violaram a desigualdade de Bell. A solução definitiva para esse problema, a nível experimental, consiste em produzir detectores mais eficientes que possam confirmar inequivocamente a violação da desigualdade de Bell.

## 16.4 Demonstração do Teorema de Bell

Depois que Bell publicou seu trabalho original [10], muitos outros cientistas produziram demonstrações diferentes do seu resultado. A prova que apresentaremos nessa seção é vantajosa em relação a da seção anterior por duas razões: primeira, por não usar nenhuma ideia de determinismo; segunda, do ponto de vista prático, a desigualdade que obteremos se relaciona a resultados detectáveis, o que facilita a implementação experimental.

O resultado mais forte nessa área, que hoje leva o nome de desigualdade CHSH, foi devido a Clauser, Horne, Shimony e Holt [52]. A desigualdade que leva esse nome, de certa forma análoga à de Bell, apresenta um caráter mais geral, além de ser mais fácil de ser testada experimentalmente.

A montagem experimental foi construída por Clauser e Horne [53]. Consiste numa fonte de partículas correlacionadas que são enviadas em duas direções e passam por analisadores (no caso de partículas com spin, aparatos de Stern-Gerlach; no caso de fótons, polarizadores) e depois atingem dois detectores. Esses detectores apenas armazenam contagem de partículas.

Supomos que a probabilidade do detector  $D_1$  armazenar uma contagem depende da configuração do analisador e de algum parâmetro incontrolável  $\lambda$ . Sendo assim, a probabilidade será denotada por  $p_1(\mathbf{a}, \lambda)$ . Os valores de  $p_1$  e, analogamente, de  $p_2$  estão entre os limites 0 e 1. Recuperamos a hipótese determinística se exigirmos que os valores são 0 ou 1. A variável incontrolável  $\lambda$  possui uma distribuição de probabilidade  $\rho(\lambda)$  tal que a probabilidade de se detectar uma contagem em  $D_1$  é:

$$P_1(\mathbf{a}) = \int p_1(\mathbf{a}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda, \quad (16.14)$$

e para o detector  $D_2$ :

$$P_2(\mathbf{b}) = \int p_2(\mathbf{b}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda, \quad (16.15)$$

já para a detecção em coincidência:

$$P_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int p_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda. \quad (16.16)$$

Agora, evocaremos o princípio de localidade de Einstein. Ele já foi implicitamente usado ao supor que  $p_1$  não depende de  $\mathbf{b}$ , e  $p_2$  não depende de  $\mathbf{a}$ . O evocaremos de novo ao assumir:

$$p_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda) = p_1(\mathbf{a}, \lambda)p_2(\mathbf{b}, \lambda). \quad (16.17)$$

Para chegar no resultado de Clauser e Horne, eles primeiramente provaram um lema. Não apresentaremos a prova aqui, o que nos importa mais é o

resultado. Sejam  $x, x', y, y', X, Y$  parâmetros reais tais que  $0 \leq x, x' \leq X$  e  $0 \leq y, y' \leq Y$  então vale a seguinte desigualdade:

$$-XY \leq xy - xy' + x'y + x'y' - Yx' - Xy \leq 0, \quad (16.18)$$

substituindo  $x = p_1(\mathbf{a}, \lambda)$ ,  $y = p_2(\mathbf{b}, \lambda)$ ,  $x' = p_1(\mathbf{a}', \lambda)$ ,  $y' = p_2(\mathbf{b}', \lambda)$  e  $X = Y = 1$  vem:

$$-1 \leq P_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + P_{12}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - P_1(\mathbf{a}') - P_2(\mathbf{b}) \leq 0, \quad (16.19)$$

essa é a chamada desigualdade de Clauser-Horne. Como os dados experimentais consistem de contagens, a comparação apropriada em teoria e experimento seria dada pelas relações:

$$P_1(\mathbf{a}) = \frac{N_1(\mathbf{a})}{N}, \quad P_2(\mathbf{b}) = \frac{N_2(\mathbf{b})}{N}, \quad P_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{N_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{N}. \quad (16.20)$$

Com essas definições podemos reescrever a desigualdade CH como sendo:

$$\frac{P_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + P_{12}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + P_{12}(\mathbf{a}', \mathbf{b})}{P_1(\mathbf{a}') + P_2(\mathbf{b})} \leq 1. \quad (16.21)$$

Nos experimentos, em geral, não é possível saber o número total de partículas e, por isso, escrever uma desigualdade na forma de uma razão de probabilidades torna o teste experimental mais simples.

Indo além, é possível encontrar predições da MQ que estão em desacordo com a desigualdade CH, de forma análoga ao que acontece com a desigualdade de Bell. Como na demonstração da desigualdade CH não usamos o determinismo, é possível afirmar que a violação da desigualdade pela MQ é devido à incompatibilidade desta com o princípio de localidade.

## 16.5 Correlações de polarização

A maioria dos experimentos que foram construídos para testar as desigualdades de Bell e CH envolvem pares de fótons correlacionados. É bastante comum produzir esses pares de fótons experimentalmente. Uma forma de fazer isso consiste no decaimento de uma fonte de momento angular total inicial  $J = 0$  para um momento angular total final  $J = 0$  emitindo dois fótons. Um exemplo disso é o positrônio, um sistema constituído de um elétron e um pósitron, que se aniquilam emitindo um par de fótons.

Conforme já comentamos no capítulo 15, há duas possibilidades de polarização para o estado de um fóton. Denotamos o estado de um fóton com modo

de polarização  $\mathbf{u}$  por  $|\mathbf{u}, \mathbf{k}\rangle$ , de tal forma que o estado mais geral possível que descreva um fóton com dois modos de polarização é da forma:

$$\sum c(\mathbf{u}_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{u}_2, \mathbf{k}_2) |\mathbf{u}_1, \mathbf{k}_1\rangle \otimes |\mathbf{u}_2, \mathbf{k}_2\rangle, \quad (16.22)$$

em que a soma é por todos os valores de polarização e de propagação. As transformações que geram o par de fótons do nosso interesse preservam o momento angular, logo o estado terá que ser invariante por rotação. Isso só será possível se a função  $c(\mathbf{u}_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{u}_2, \mathbf{k}_2)$  for escalar em seus argumentos. Podemos simplificar ainda mais o tratamento do problema ao usar o sistema de referência centrado no momento  $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$ , cujo módulo  $k = |\mathbf{k}|$  é fixado pela conservação de energia. Diante disso, os únicos escalares não triviais são  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)$ , e  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$  ambos podendo ser multiplicados por uma função escalar arbitrária de  $k$ . O primeiro tem paridade ímpar e o segundo tem paridade par.

### 16.5.1 Decaimento do positrônio

Como o positrônio é um sistema partícula-anti partícula, a paridade do estado é oposta àquela de um estado similar de duas partículas. Isso pode ser obtido direto da teoria quântica relativística [54]. O estado fundamental do positrônio, de paridade ímpar, será dado por:

$$|\psi_{-}\rangle = C \int \sum \mathbf{k} \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) |\mathbf{u}_1, \mathbf{k}\rangle \otimes |\mathbf{u}_2, -\mathbf{k}\rangle d\Omega_k, \quad (16.23)$$

em que  $C$  é uma constante de normalização,  $2\mathbf{k}$  é o momento relativo dos fótons, a integral é sobre todas as direções de  $\mathbf{k}$  e a soma é sobre todas as polarizações. A partir do setup experimental, há uma seleção de valores de  $\mathbf{k}$  que estão próximos do eixo  $z$ , então a parte relevante do vetor de estado será:

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\hat{x}_1, \mathbf{k}\rangle \times |\hat{y}_2, -\mathbf{k}\rangle - |\hat{y}_1, \mathbf{k}\rangle \times |\hat{x}_2, -\mathbf{k}\rangle], \quad (16.24)$$

em que  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são vetores unitários nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Os fótons estão correlacionados em polarização, logo, se medirmos um na direção  $x$ , o outro necessariamente estará na direção  $y$ , e jamais na  $x$ . Como o estado é invariante por rotação, essa conclusão deve valer para qualquer par de direções arbitrárias e ortogonais no plano  $xy$ . Se, por outro lado, medirmos a probabilidade de encontrar o primeiro fóton em uma direção arbitrária  $\mathbf{a}$  de polarização encontraremos  $1/2$  e a probabilidade condicional do segundo fóton passar no outro polarização na direção arbitrária  $\mathbf{b}$  será  $|\sin(\theta_{ab})|^2$ .



Portanto, por invariância de rotação, a probabilidade de coincidência valerá para quaisquer direções arbitrárias  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  e será dada por:

$$|P_{12}| = \frac{1}{2} |\sin(\theta_{ab})|^2. \quad (16.25)$$

Pode-se mostrar que existem intervalos de valores de  $\theta$  para os quais a desigualdade CH é violada.

### 16.5.2 A cascata $J = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

Existem muitos átomos que possuem um estado excitado de momento angular  $J = 0$ , os quais decaem para um estado intermediário de momento angular  $J = 1$  emitindo um fóton de frequência  $\omega_1$  e, depois, decai novamente para o estado fundamental com momento angular  $J = 0$  emitindo um fóton de frequência  $\omega_2$ . Não há variação no momento angular total e nem na paridade do átomo nesse processo. Por conta do recuo do átomo ao emitir as partículas, as direções dos momentos dos fótons,  $\hbar\mathbf{k}_1$  e  $\hbar\mathbf{k}_2$  não são fortemente correlacionados e para enfatizar as relações  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{k}_1 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 0$  definimos:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{\perp,1} \equiv \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{k}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}_1)}{k_1^2}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{\perp,2} \equiv \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{k}_2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{u}_2)}{k_2^2}. \quad (16.26)$$

Com isso o vetor de estado e sua parte relevante serão dados por:

$$\begin{aligned} |\psi_+\rangle &= \sum (\mathbf{u}_{\perp,1} \cdot \mathbf{u}_{\perp,1}) |\mathbf{u}_1, \mathbf{k}_1\rangle \otimes |\mathbf{u}_2, \mathbf{k}_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\hat{x}_1, \mathbf{k}_1\rangle \otimes |\hat{x}_2, \mathbf{k}_2\rangle + |\hat{y}_1, \mathbf{k}_1\rangle \otimes |\hat{y}_2, \mathbf{k}_2\rangle]. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Seguindo a mesma argumentação da seção 16.5.1 podemos encontrar:

$$|P_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \frac{1}{2} |\cos(\theta_{ab})|^2, \quad (16.28)$$

e essa expressão também viola a desigualdade CH para certos valores de  $\theta$ .

### 16.5.3 Testes experimentais

Devido a estrutura dos testes experimentais que comentamos nas subseções anteriores, a expressão da desigualdade CH fica simplificada nesses casos. Como a probabilidade de coincidência depende apenas do ângulo relativo e usando a definição de ângulos da figura abaixo:

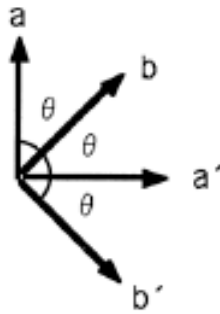


Figura 16.1: Escolha das direções de polarização para o teste experimental da desigualdade CH. Extraído de [2].

conseguimos expressar a desigualdade CH da seguinte forma:

$$S(\theta) = \frac{3P_{12}(\theta) - P_{12}(3\theta)}{P_1 + P_2} \leq 1. \quad (16.29)$$

Substituindo as predições da mecânica quântica, para as quais  $P_1 = P_2 = 1/2$  e  $P_{12}(\theta) = \frac{1}{2}|\cos(\theta)|^2$  podemos calcular  $S(\theta)$ . Plotamos essa função no gráfico a seguir:

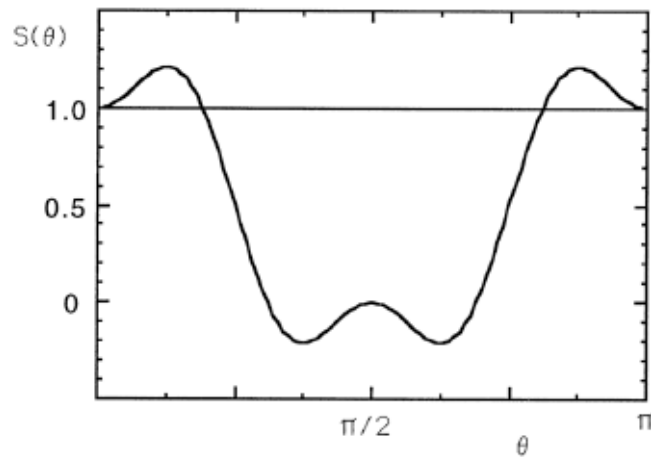


Figura 16.2: Gráfico da função  $S(\theta)$  em função de  $\theta$  calculado de forma ideal através da mecânica quântica. Extraído de [2].

Note que a desigualdade CH é violada sempre que  $S(\theta) > 1$  o qual acontece para valores de  $\theta$  em diferentes intervalos. Nos referimos a esse cálculo como

sendo ideal, pois não leva em conta as características reais dos detectores e dispositivos usados na medição. Um caso mais realista seria:

$$[P_1]_{\text{exp}} = \frac{1}{2} \eta_1 f_1 \epsilon_1^+, \quad (16.30)$$

$$[P_2]_{\text{exp}} = \frac{1}{2} \eta_2 f_2 \epsilon_2^+, \quad (16.31)$$

$$[P_1]_{\text{exp}} = \frac{1}{4} \eta_1 \eta_2 f_1 g_{12} \left\{ \epsilon_1^+ \epsilon_2^+ + \epsilon_1^- \epsilon_2^- F \cos(2\theta) \right\}. \quad (16.32)$$

Os subscritos 1 e 2 referem-se aos dois fótons e as frações aos aparatos experimentais. A eficiência dos detectores é  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . O filtro de polarização é descrito pelo parâmetro  $\epsilon^+ = \epsilon^M + \epsilon^m$  e  $\epsilon^- = \epsilon^M - \epsilon^m$ , em que  $\epsilon^M$  é o coeficiente de transmissão da radiação polarizada paralela ao eixo do filtro e  $\epsilon^m$  é o coeficiente de transmissão da radiação polarizada perpendicular ao eixo do filtro.  $f_1$  é a probabilidade que o fóton de frequência  $\omega_1$  emitido pela fonte entre no analisador 1, e  $f_2$  é o caso análogo para o outro fóton. A correlação direcional entre os momentos de ambos fótons é determinado pelo parâmetro  $g_{12}$ . Já o parâmetro  $F$  é uma medida do grau de correlação entre as polarizações dos fótons no estado inicial. Se colocarmos todos os parâmetros iguais a 1, recuperamos o resultado da M.Q. Consideremos, por simplicidade, que ambos dispositivos são idênticos, logo o subscrito deixa de fazer sentido. Substituindo esses resultados na equação (16.29) encontramos:

$$[S(\theta)]_{\text{exp}} = \frac{\eta g}{4\epsilon^+} \left\{ 2(\epsilon^+)^2 + (\epsilon^-)^2 F [3 \cos(2\theta) - \cos(6\theta)] \right\}. \quad (16.33)$$

A partir dessa expressão podemos concluir que o valor experimental de  $S(\theta)$  falha para violar a desigualdade CH meramente por causa dos vários parâmetros instrumentais e, portanto, o experimento não é suficiente para decidir entre a M.Q. e a classe de teorias que obedecem o princípio de localidade que sustenta o teorema de Bell. Cada classe de experimento tem que ser analisada separadamente.

Apesar de o positrônio possuir altos valores para os parâmetros  $g$  e  $F$  (por conta da forte correlação e da paridade ímpar), não existem bons detectores de fótons para fótons de alta energia. Por isso, nesse tipo de experimento, até o momento com a tecnologia atual, não é possível obter valores de  $[S(\theta)]_{\text{exp}}$  maiores do que 1.

Para o caso da cascata de decaimentos a situação é oposta. Existem detectores de alta eficiência, porém as correlações entre os fótons é mais baixa, diminuindo os parâmetros  $g$  e  $F$ . Algumas modificações experimentais podem ser feitas, como aumentar a janela de detecção para captar mais pares, porém isso destrói a aproximação para o estado  $|\psi_+\rangle$ .

Foi demonstrado por Garg e Mermin [55] que é possível obter a violação da desigualdade de Bell pela M.Q. de forma inequívoca se tivermos detectores com eficiência  $\eta > 0.83$ . A maior eficiência até agora é de  $\eta = 0.76$  [56].

Por essas razões de natureza técnica é difícil realizar um experimento que possa decidir de forma estrita sobre a relação entre a M.Q. e as desigualdades de Bell. Por causa disso algumas considerações adicionais foram propostas para tentar entender a falseabilidade dos experimentos. A maioria dessas propostas, de forma geral, servem para justificar que os pares de fótons que são detectados constituem uma amostra estatisticamente representativa de todo o ensemble de fótons emitidos pela fonte. Se tal hipótese é verdadeira, então existem vários experimentos que confirmam as predições da M.Q. com alto grau de precisão e que implicam na violação das desigualdades de Bell e de CH.

Há ainda uma técnica experimental oriunda da óptica não-linear, conhecida como **conversão paramétrica descendente**, que consiste na emissão de um par de fótons correlacionados que satisfazem  $\omega_1 + \omega_2 = \omega$  e  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ , sendo que  $\omega$  e  $\mathbf{k}$  são frequência e vetor de onda de um fóton incidente em um cristal não-linear. Esse método é melhor do que a cascata de decaimentos porque possui uma correlação um pouco mais forte. Shih e Alley<sup>1</sup> [57] usaram esse método para provar, através dessa técnica, a violação da desigualdade de Bell.

As violações da desigualdades de Bell, bem como a sua inconsistência com a mecânica quântica, são ainda áreas de ativa pesquisa hoje em dia, tanto a nível teórico quanto experimental. Recentemente, em 2013, um artigo publicado na revista *Nature* [58] garante ter encontrado uma violação das desigualdades de Bell sem recorrer a hipótese da representatividade estatística da amostra, o que é um resultado fortíssimo a favor da incompatibilidade entre a M.Q. e a hipótese de localidade subjacente à demonstração do teorema de Bell.

## 16.6 Exercícios

**Exercício 16.1** *Resolva os exercícios do livro do Ballentine [2].*

---

<sup>1</sup>Note que no livro do Ballentine, página 602, o nome de um dos autores está grafado errado.